

國立成功大學  
機械工程學系  
碩士論文

公差與剛性對機械手臂  
於承載下精度之影響

Impacts of Tolerance and Stiffness on the Accuracy  
of Manipulators with Payload

研究生：薛伊倩  
指導教授：詹魁元博士

中華民國一百零一年七月

公差與剛性對機械手臂  
於承載下精度之影響

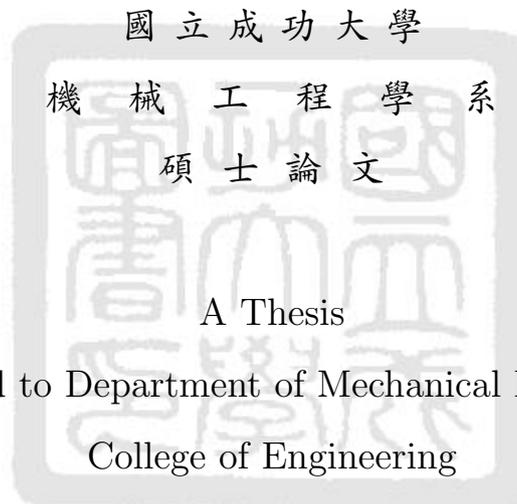
Impacts of Tolerance and Stiffness on the Accuracy  
of Manipulators with Payload

研 究 生：薛伊倩

Student: Yi-Chien Hsueh

指 導 教 授：詹魁元博士

Advisor: Dr. K.Y. Chan



A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering

National Cheng Kung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Dept. of Mech. Eng.

July 2012

Tainan, Taiwan

中華民國一百零一年七月



# 公差與剛性對機械手臂 於承載下精度之影響

學生：薛伊倩

指導教授：詹魁元博士

國立成功大學機械工程學系

## 摘 要

機械手臂已在各項產業廣泛的使用，其精度為產品加工時必須考慮的重要因素。除常見的幾何公差以及尺寸公差會影響到產品的加工精度外，機械手臂關節的剛性（Joint Stiffness）對加工精度的影響也是不容忽視的。提高機械手臂關節的剛性能夠有效的抑制外在環境不確定因素所造成的誤差，而文獻上許多相關研究將關節剛性視為無限大，然而在實際的情況下，關節剛性無法達到無限大，也因此不可忽視其對加工精度之影響。在精密的製造程序，機械手臂少許的誤差會造成加工失敗，所以如何改善加工精度是為一個持續受到重視且廣為探討的問題。目前改善精度的方式大多使用控制器，然而經由控制器來改善精度將提高系統成本。本研究主要目的是探討當機械手臂存在尺寸公差與關節剛性造成的加工誤差時，如何在不增加額外成本（控制器）的狀況下，利用加工特性的改變，提升現有機械手臂的加工精度，並進一步探討機械手臂於承載下之動態行為。

首先本文先使用Denavit-Hartenberg齊次轉換矩陣推導出機械手臂的順逆向運動學，藉由順逆向運動學，我們便能夠得知機械手臂末端位置與關節轉角之間的關係。有了前述關係作為基礎，接著使用最佳化方法，找出單點加工時，加工誤差最小的最佳加工位置；其次，當已知加工路徑的函數形式，我們能夠經由最佳化方法找出最適合的路徑參數，使得加工點的誤差達到最小；最後，當機械手臂進行取物置物、搬運等製程時，此荷重對機械手臂之加工精度必然也產生影響，本文也將對機械手臂負重時的單點加工與加工路徑之誤差最佳化作探討。此一系統化的決策過程，不但能找出某一特定公差下之最佳加工模式，亦能協助選擇機械手臂，不但能達到成本最低，同時也兼顧了加工精度之要求。本文展示了水平式四軸機械手臂（SCARA）與垂直式六軸機械手臂（Fanuc S-900W）作為範例演示以證明研究方法之有效性。

關鍵字：機械手臂；公差；剛性；負載；精度；最佳化

# Impacts of Tolerance and Stiffness on the Accuracy of Manipulators with Payload

Student: Yi-Chien Hsueh

Advisor: Dr. K.Y. Chan

Department of Mechanical Engineering  
College of Engineering  
National Cheng Kung University

## ABSTRACT

Robot manipulators have been an important part of modern manufacturing processes in various industries. The precision and accuracy of these manipulators are essential in the quality and reliability of the final products. In addition to geometric and dimensional tolerances, the stiffness of robot joints that are inherent from the complex actions within a joint often dominates the precision and accuracy of a manipulator. A joint with high stiffness can effectively reduce disturbances and positioning errors from external uncertainties of the environment. Therefore a number of studies in the literature consider the stiffness of manipulator joints as infinity when planning a manufacturing scheme for a manipulator. However, in reality finite joint stiffness value might result in an unacceptable precision in many industries. Alternatively, the state-of-the-art controllers have also been used in the literature to alleviate the positioning errors from either tolerances or joint stiffness. The introduction of modern controllers also increase the manufacturing cost, therefore in this research we suggest that engineers should perform appropriate manufacturing planning of a manipulator such that the precision and accuracy is optimized with minimal added cost.

We use the dynamics of a manipulator with and without payload to determine the optimal manufacturing scheme without controller. The Denavit-Hartenberg matrix is first used to obtain the end effector location of a robot manipulator via forward and backward kinematics. The optimal operating location with the minimal end effector dimensional variations is then calculated within a constrained working space. The process is extended to search for the optimal parameters with a known path function considering an end effector location sequence with multiple operating points. We also consider the effects of payload with dynamics in both single and multiple operation locations scenarios. The proposed method not only can improve

the accuracy of a given manipulator without adding cost, it but also can be used to select manipulators within a budget. Case studies with a 4-axis horizontally selective compliant articulated robot arm (SCARA) and a 6-axis vertically articulated robot arm (Fanuc S-900W) are used to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words : Manipulator ; Tolerance ; Stiffness ; Payload ; Accuracy ; Optimization



# 誌 謝

能夠順利完成本論文首要感謝指導老師—詹魁元教授，兩年的碩士生涯中，在研究上不斷的提供寶貴的意見與耐心的指導，以及學生論文撰寫的逐字斧正，而在生活上也不時的關心我們、照顧我們，讓學生在這兩年內學習很多也成長許多。

同時，也要感謝口試委員—黃金洵教授與 陳家豪教授給予本研究以及論文上的許多指導與建議，使本論文之內容能夠更加完善。

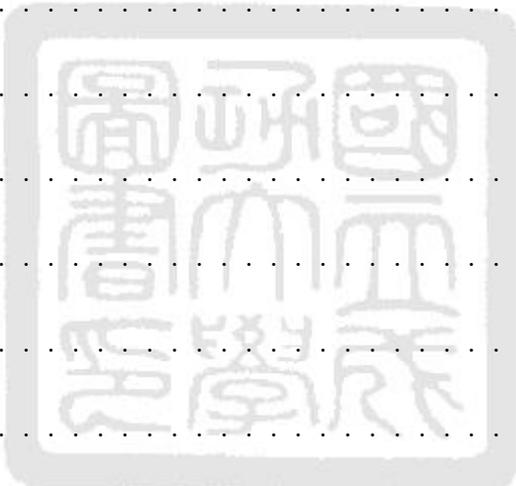
這兩年的日子，特別感謝「系統最佳化實驗室」的大家，感謝實驗室的學長姐：子頤、佳豪、勝昌、季儒、彬儀，在我剛進入碩士班後，不斷地給予課業上的幫助，而在研究上遭遇到困難，也不厭其煩的指導我；感謝我的同學力豪，在碩士生涯兩年中，很慶幸有這麼一位好夥伴，在研究上為我提供意見與看法，一起努力一起歡笑，最後一起順利畢業；感謝學弟妹：侑君、典運、東泰、庭玉、煜駿、值榕、明證、肇余，一起談天一起出遊，帶給我很多的美好回憶。另外，感謝同屆的同學洪振寧、宛君，在修課上面的幫助以及研究上的幫助；感謝世薪在研究所生涯的陪伴與照顧，在我遭遇困難與低潮時，總是能夠適時地提供幫助與分擔壓力。

感謝我最愛的朋友們：巧薇、世榮、漪霖、游志忠，雖然大家不能夠常常相聚，但總能彼此分享心事，給我鼓勵與支持，帶給我滿滿的溫暖。

最後要感謝我最親愛的家人，感謝爸爸媽媽對我的栽培與照顧，讓我在求學的生涯中能夠專心於課業上，不須有額外的煩惱，感謝姐姐們與可愛的欣怡與弈淳，只要回到家裡見到你們，所有的煩悶壓力都能夠拋開，你們的笑容就是給我的最大的禮物，謹以此論文獻給我最親愛的你們。

# 目 錄

書名頁 . . . . .	i
論文口試委員審定書 . . . . .	ii
中文摘要 . . . . .	iii
英文摘要 . . . . .	iv
誌謝 . . . . .	vi
目錄 . . . . .	vii
表目錄 . . . . .	x
圖目錄 . . . . .	xii
符號說明 . . . . .	xiv
第一章、緒論 . . . . .	1
1.1 前言 . . . . .	1
1.2 研究動機與目的 . . . . .	2
1.3 本文架構 . . . . .	2
第二章、研究背景與文獻回顧 . . . . .	4
2.1 文獻分類依據 . . . . .	4
2.2 最佳設計領域 . . . . .	5
2.3 路徑規劃領域 . . . . .	6
2.4 其他領域 . . . . .	8
2.5 文獻結論 . . . . .	9
第三章、運動原理與理論基礎 . . . . .	10



3.1	座標系統與參數之定義	10
3.2	D-H齊次轉換矩陣	11
3.3	逆向運動學	13
第四章、研究方法		18
4.1	加工位置選擇對精度之影響	18
4.2	無負載下之加工位置最佳化	22
4.3	有負載下之加工位置最佳化	25
4.4	無負載下之運動軌跡最佳化	28
4.5	有負載下之運動軌跡最佳化	31
第五章、工程範例		34
5.1	水平式四軸機械手臂 (SCARA)	34
5.1.1	無負載下之加工位置最佳化	35
5.1.2	有負載下之加工位置最佳化	38
5.1.3	無負載下之運動軌跡最佳化	40
5.1.4	有負載下之運動軌跡最佳化	43
5.2	垂直式六軸機械手臂 (Fanuc, S-900W)	46
5.2.1	逆向運動學求解	47
5.2.2	無負載下之加工位置最佳化	50
5.2.3	有負載下之加工位置最佳化	52
5.2.4	無負載下之運動軌跡最佳化	54
5.2.5	有負載下之運動軌跡最佳化	57
5.3	結果討論	60

第六章、研究貢獻與未來方向 . . . . .	62
6.1 研究貢獻 . . . . .	62
6.2 未來研究方向 . . . . .	63
參考文獻 . . . . .	64
附錄A：SCARA動態誤差計算 . . . . .	66
附錄B：S-900W動態誤差計算 . . . . .	71



# 表 目 錄

2.1 機械手臂文獻分類表 . . . . .	4
3.1 SCARA機械手臂D-H參數列表 . . . . .	14
4.1 不同加工位置之加工誤差各級表現 . . . . .	21
5.1 SCARA機械手臂已知參數表 . . . . .	35
5.2 SCARA無負載下最佳加工位置與最差加工位置比較 . . . . .	35
5.3 SCARA機械手臂已知參數表 . . . . .	38
5.4 SCARA無負載下最佳加工位置與最差加工位置比較 . . . . .	38
5.5 SCARA機械手臂已知參數表 . . . . .	40
5.6 SCARA無負載單點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	40
5.7 SCARA無負載多點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	42
5.8 SCARA無負載下理想與最佳路徑之比較 . . . . .	42
5.9 SCARA機械手臂已知參數表 . . . . .	43
5.10 SCARA有負載單點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	43
5.11 SCARA有負載多點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	45
5.12 SCARA有負載下理想與最佳路徑之比較 . . . . .	45
5.13 SCARA機械手臂D-H參數列表 . . . . .	47
5.14 S-900W機械手臂已知參數表 . . . . .	50
5.15 S-900W無負載下最佳加工位置與最差加工位置比較 . . . . .	50
5.16 S-900W機械手臂已知參數表 . . . . .	52

5.17 S-900W有負載下最佳加工位置與最差加工位置比較 . . . . .	52
5.18 SCARA機械手臂已知參數表 . . . . .	54
5.19 S-900W無負載單點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	54
5.20 S-900W無負載多點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	55
5.21 S-900W無負載下理想與最佳路徑之比較 . . . . .	56
5.22 SCARA機械手臂已知參數表 . . . . .	57
5.23 S-900W有負載下運動軌跡最佳化結果 . . . . .	57
5.24 S-900W有負載多點加工最佳運動軌跡結果 . . . . .	59
5.25 S-900W有負載下理想與最佳路徑之比較 . . . . .	59
5.26 SCARA有無負載下之誤差比較 . . . . .	60
5.27 S-900W有無負載下之誤差比較 . . . . .	60
5.28 SCARA與S-900W於無負重下之誤差比較 . . . . .	61

# 圖 目 錄

3.1	定義連桿參數 [14]	11
3.2	SCARA機械手臂的D-H參數示意圖 [2]	13
4.1	加工位置誤差計算流程圖	19
4.2	平面SCARA機械手臂示意圖	20
4.3	無負載下加工位置最佳化流程圖	22
4.4	有負載下加工位置最佳化流程圖	25
4.5	無負載下運動軌跡最佳化流程圖	28
4.6	有負載下運動軌跡最佳化流程圖	31
5.1	SCARA機械手臂示意圖 [2]	34
5.2	平均表現與最差表現比較圖	36
5.3	SCARA最佳加工位置最差表現	37
5.4	SCARA最佳加工位置平均表現	37
5.5	SCARA有負載下最佳加工位置最差表現	39
5.6	SCARA有負載下最佳加工位置平均表現	39
5.7	SCARA無負載單點加工最佳運動軌跡	41
5.8	SCARA無負載多點加工最佳運動軌跡	41
5.9	SCARA有負載單點加工最佳運動軌跡	44
5.10	SCARA有負載多點加工最佳運動軌跡	44
5.11	S-900W機械手臂示意圖 [10]	46

5.12 S-900W機械手臂的D-H參數示意圖 [14]	47
5.13 S-900W最佳加工位置最差表現	51
5.14 S-900W最佳加工位置平均表現	51
5.15 S-900W最佳加工位置最差表現	53
5.16 S-900W最佳加工位置平均表現	53
5.17 S-900W無負載單點加工最佳運動軌跡	55
5.18 S-900W無負載多點加工最佳運動軌跡	56
5.19 S-900W有負載單點加工最佳運動軌跡	58
5.20 S-900W有負載多點加工最佳運動軌跡	58
A.1 SCARA機械手臂簡易圖	66
B.1 S-900W機械手臂簡易圖	71



# 符 號 說 明

$a$	加速度
$A$	面積
${}^{i-1}A_i$	D-H齊次轉換矩陣
$c$	路徑參數
$d_i$	D-H連桿長度參數
$E$	誤差表現
$I$	質量慣性矩
$L_i$	D-H連桿長度參數
$\Delta L$	長度公差
$\Delta L^r$	長度隨機公差
$m$	質量
$N$	隨機公差個數
$q$	加工點位置
$Q$	具公差之隨機加工點位置
$R$	桿件截面半徑
$R_j$	關節截面半徑
$u$	機械手臂末端方向向量
$v$	機械手臂末端方向向量
$w$	機械手臂末端方向向量
$W$	機械手臂工作空間



$T$	轉換矩陣
$T_{total}$	經過時間
$\alpha$	角加速度
$\alpha_i$	D-H連桿角度參數
$\theta_i$	D-H連桿角度參數
$\Delta\theta$	角度公差
$\Delta\theta^r$	角度隨機公差
$\rho$	材料密度
$\omega$	角速度
$\sigma$	應力
$\epsilon$	應變
$\epsilon_i$	具公差之隨機加工位置與理想加工位置間距離
$\tau$	剪應力



# 第一章 緒論

## 1.1 前言

機械手臂已在各項產業廣泛的使用，除了主要用於工業製造上，商業、農業、醫療救援，甚至在太空探索等領域都可以發現機械手臂之應用。目前工業用機械手臂常見的種類可分為極座標型（Polar）、圓筒座標型（Cylindrical）、正交座標型（Cartesian）、垂直關節型（Articulated）、水平關節型（SCARA）等五種類型，在工業上應用層面最廣的為水平與垂直關節型機械手臂 [1]。

在機械製造領域，機械手臂常用於取物、置物、焊接、噴漆、鑽床、銑床、組裝等製程，而其精度為產品加工時必須考慮的重要因素。機械手臂運動精度的定義包含定位精度與重複定位精度，定位精度是指機械手臂末端位置實際到達位置與指定位置間的誤差量，重複定位精度是指該機械手臂受重複指令執行相同動作時末端位置的差異度。

影響到產品的加工精度最常見的因素為幾何公差以及尺寸公差，幾何公差又分為形狀公差、方向公差、位置公差及偏轉公差等四種，其個別之定義如下：

- 形狀公差：表達單一型態之外型偏離其理想外型的誤差，如真直度公差、圓柱度公差。
- 方向公差：表達兩型態間的相關方向，如平行度公差、垂直度公差。
- 位置公差：表達兩型態間的相關位置，如同心度公差、對稱度公差。
- 偏轉公差：管制幾何型態在任何位置作迴轉時最大容許改變量，如圓偏轉度公差。

而尺寸公差則是指產品加工後的長度、直徑、角度上的誤差，而其誤差便會影響到加工位置的精度。

除了幾何與尺寸公差之外，機械手臂關節的剛性（Joint Stiffness）對產品的加工精度的影響也是不可忽視的。剛性（Stiffness）是用來表示外力作用於物體時，物體變形量與外力大小間的關係，如彈簧的k值，在多維度系統便演變成剛性矩陣（Stiffness Matrix），當提高機械手臂關節的剛性能夠有效的抑制外在環境不確定因素所造成的誤差，當關節剛性趨近於

無限大時，即可將系統視為理想剛體，但在實際的情況下，關節剛性不可能達到無限大，意即在實際情況下機械手臂之關節存在誤差，因此不可否認其對加工精度之影響是存在的。

## 1.2 研究動機與目的

在前文中提到，幾何與尺寸公差以及關節剛性均對機械手臂之加工精度有著不可忽視的影響，而對於製造精密儀器而言，機械手臂些許的誤差量也會造成加工失敗，加工失敗不但會提高成本更是浪費時間，後續影響問題非常嚴重，所以加工精度的改善是為一個相當值得探討的問題。目前改善精度的方式多為使用控制器，經由增加控制器來改善精度會增加成本及系統的複雜度，使得系統失效的機率增加。

本文主要探討當機械手臂存在尺寸公差與剛性造成的誤差時，如何在不增加額外成本，意即在不增加控制器的狀況下，提升現有機械手臂的加工精度，並進一步探討機械手臂於承載下之動態行為。主要目的有以下點：

1. 使用最佳化方法找出最佳加工點位置以改善加工精度。
2. 使用最佳化方法找出最佳路徑函數參數以改善加工精度。
3. 加入負載與動態誤差以了解負載及動態對加工精度之影響。

## 1.3 本文架構

本文一共分為六章，內容架構如下：

- 第一章：緒論  
說明本文的研究動機與目的、本文架構。
- 第二章：研究背景與文獻回顧  
針對機械手臂與公差相關的領域作探討，並比較機械手臂各領域與本文研究方向之差別。
- 第三章：運動原理與理論基礎  
介紹Denavit-Hartenberg齊次轉換矩陣以求解機械手臂的順逆向運動學。

- 第四章：研究方法

使用最佳化方法找出當存在公差時，機械手臂於無負載、有負載下之最佳加工位置以及最佳運動軌跡。

- 第五章：工程範例

將研究方法套用至SCARA機械手臂與Fanuc公司的S-900W機械手臂。

- 第六章：研究貢獻與未來發展

總結本研究之貢獻及未來之發展。



## 第二章 研究背景與文獻回顧

### 2.1 文獻分類依據

目前在機械手臂最佳化領域當中，大致可分為設計最佳化與控制最佳化，其中又以與控制相關的較多，而本研究主要探討的為希望在不增加成本的狀況下，意即不增加額外控制器的情況下，單就設計最佳化來達到精度的提升，欲探討之詳細內容為當機械手臂存在公差與負重之下的最佳加工點位置以及最佳路徑，由上述所描述之內容，我們將其要點列出作為文獻探討之分類依據：

- 動態：需考量到機械手臂任一時刻之動態行為。
- 不確定性：在考量到不確定性之下，同時需彌補此不確定性造成之影響。
- 設計：經由設計方法來解決問題。
- 路徑規劃：規劃機械手臂之運動路徑。
- 負重：在考量到負重之下，同時需加入應力造成之影響。

各文獻分類如表2.1所示，本文將機械手臂相關文獻大致分為最佳設計領域、路徑規劃領域以及其他無法歸類之文獻，但目前並無結合本文所規劃探討的所有要點之研究，我們將在後面的章節介紹上述幾種領域之文獻以及本論文所要探討的最佳化數學模型。

表 2.1: 機械手臂文獻分類表

	動態	不確定性	設計	路徑規劃	負重
最佳設計	✓		✓		
路徑規劃	✓		✓	✓	
其他領域	✓	✓	✓		

## 2.2 最佳設計領域

最佳化設計經常被使用來處理產品之設計問題，基本概念為在滿足特定限制條件下，達到最好之目標結果，而機械手臂在最佳設計領域中，已進行相當多不同的最佳化目標之探討，經由最佳化來達到更好的機械手臂效能，主要探討如何最大化工作空間，最大化操作性，最小化最大力矩等等，此類文獻可統整為以下最佳化模型：

$$\text{Optimize } \{\text{Performance}\} \quad (2.1a)$$

$$\text{with respect to } \{\text{Dimensions}\} \quad (2.1b)$$

$$\text{subject to } \{\text{Constraints}\} \quad (2.1c)$$

最佳設計領域當中，最佳化的目標可統稱為機械手臂的性能，設計變數為機械手臂的尺寸，包含長度、質量等，各參考文獻的詳細內容介紹如下：

- Zhang等人 [15]使用多目標最佳化 (Multi-objective Optimization) 之權重法結合三個目標函數，分別為操作性、工作空間、機械手臂尺寸，使用MATLAB下之基因演算法 (Genetic Algorithm) 進行最佳化模擬，經過模擬結果後達到工作空間之最大化。
- Stock等人 [13]首先建立了並聯式機械手臂的順逆向運動學模型，接著使用多目標最佳化之權重法探討並聯式機械手臂的操作性與空間利用性兩目標，其設計變數為各長度尺寸的比率，經由不同權重組合的設定進行多目標最佳化模擬，最後結果展示不同權重組合下之最佳設計參數與目標。
- Coello等人 [5]使用多目標最佳化，目標函數結合扭矩以及作用力，設計變數為機械手臂的桿件長度以及質量，目的為求得最佳的尺寸使得扭矩與作用力達到最小，文中使用基因演算法求解。
- Carignan等人 [3]在文中探討的對象為平面雙手機械手臂，當其在夾持目標物的狀況下，第一部分假設路徑已知，使用最佳化求解關節扭矩使其達到最小，第二部分經由第一部分的結果可進行路徑的規劃，文中同時展示了平面雙手機械手臂的運動方程式。

經由上述文獻的介紹，我們可以更加瞭解到機械手臂在最佳化設計領域當中所進行的問題探討，後文將介紹使用最佳化方法結合路徑規劃以進行機械手臂的探討。

## 2.3 路徑規劃領域

機械手臂之路徑規劃近年來已經成為廣為討論的重要議題，典型的路徑規劃問題描述如下：給定的三維剛體已知的障礙，任務為尋找到從起點至終點無碰撞之路徑配置，且此任務需要在合理的時間內完成，以下將介紹結合最佳化與路徑規劃之參考文獻及其最佳化模型：

$$\text{Optimize } \{\text{Energy}\} \quad (2.2a)$$

$$\text{with respect to } \{\text{Input parameters}\} \quad (2.2b)$$

$$\text{subject to } \{\text{Constraints}\} \quad (2.2c)$$

- Owen等人 [9]以雙手機械手臂作為模擬的依據，其加工方式為一手夾持工件，一手進行加工，經由降低速度，即降低關節扭力的破壞，提升機械手臂的動態剛性能力，文中提出的成本函數為撓性指標，此撓性指標經由關節扭矩的最小化求得，並使用最佳化演算法決定最好的機械手臂移動路徑使得剛性最大化。
- Chen等人 [4]使用最佳化方法最小化能量消耗，並求得最佳系統輸入之關節角速度，同時經由關節角速度可得知關節轉角之時間函數，即可得到機械手臂之移動軌跡。
- Geering等人 [6]假設已知機械手臂之起點與終點，欲求滿足受力限制下之最小成本，經由最佳力量時間函數求得機械手臂各關節之運動函數。
- Saramago等人 [12]使用多目標最佳化結合總時間與能量，並經由最佳化過程求得各機些手臂關節轉角的時間函數，文中使用兩款機械手臂作範例展示，其一為3個自由度的旋轉關節機械手臂，其二為6個自由度的stanford機械手臂。

在路徑規劃領域當中，Incerti [8]探討的最佳化目標與本研究相同，皆為最小化加工位置誤差，本研究欲改善機械手臂之加工精度，欲使用最佳化方法搜尋誤差最小之加工位置或加工路徑，而Incerti主要目的在使用最佳化方法最小化末端位置的平均誤差，以下為其最佳化模型：

Optimize {Error} (2.3a)

with respect to {Input parameters} (2.3b)

subject to {Constraints} (2.3c)

under {Stiffness, Damping} (2.3d)

文中探討的對象為平面的SCARA機械手臂，其主要目的在使用最佳化方法最小化末端位置的平均誤差，其中已知機械手臂遵循一固定路徑運作，在計算當中將剛性與阻尼造成之效果列入考量，最後經由最佳化可在不減少速度的狀況下改善機械手臂的加工精度，與本文不相同的地方在此文獻僅考慮二維的狀況，真實狀況下應該是三維的情況，且在此文獻當中未將公差與負重後造成的應力效果列入考量，這也是本研究主要要探討的部分。



## 2.4 其他領域

前兩小節分別介紹了機械手臂在最佳設計領域以及路徑規劃領域的最佳化模型與相關文獻內容，本節將介紹無法歸類但在文中皆考慮不確定性之文獻。

Rout等人 [11]以二維的簡單機械手臂作為範例，使用田口方法進行機械手臂的公差設計，公差設計通常存在於設計流程的後端，即在完成最佳設計後，針對最佳設計的各個尺寸與幾何公差進行設計，以提高產品品質或降低製造成本，若尺寸公差制定過大，可能會造成零件無法組裝的問題，反之，精密的尺寸公差制定可防止上述情形發生，但卻會提高製造成本，故工程師應進行公差設計以尋求此設計最適當之公差配置，以下為此篇文獻之最佳化模型：

$$\text{Optimize } \{\text{Error}\} \quad (2.4a)$$

$$\text{under } \{\text{Tolerance}\} \quad (2.4b)$$

其中考量的不確定因素包含製造公差與關節扭矩造成的動態變異，公差設計的目標為最小化位置平均誤差，最後使用 $L_8$ 田口直交表進行公差設計以達到平均誤差最小，與本研究相同之處為其欲達到的目標相同，皆為求得最小誤差，並且皆把尺寸公差與關節造成的誤差的影響加入考量，可見其重要性，但本研究並不探討公差的設計，而是在公差已知的情況下進行誤差的改善。

Grahn等人 [7]探討機械手臂在進行取物置物時的運動最佳化，最佳化的目標分為兩個部分，第一部分使用LFR與SCARA機械手臂，欲最小化機械手臂在任何可達位置下之最大力矩，第二部分使用LERp與圓統座標型機械手臂，欲最小化最大扭矩與最大作用力，最佳化模型如下：

$$\text{Optimize } \{\text{Torque, Force}\} \quad (2.5a)$$

$$\text{with respect to } \{\text{Link length, Joint function}\} \quad (2.5b)$$

$$\text{under } \{\text{Tolerance}\} \quad (2.5c)$$

其中設計變數為機械手臂的桿長以及關節轉角的時間函數，且最佳化過程中考量存在容許誤差，但僅在容許誤差較大時適用，當容許誤差過小便不適用於此文獻的方法進行求解。

## 2.5 文獻結論

本章介紹了各領域的最佳化模型，分別為最佳設計領域、路徑規劃領域及其他領域，而本文欲探討機械手臂存在尺寸公差與剛性造成的誤差下，進行加工誤差的最佳化，同時經由最佳化的過程找到最好的加工位置與路徑，並欲將負重的動態誤差影響加入討論，以下將本文所要進行探討目標以最佳化模型的方式呈現，以進行比較：

$$\text{Optimize } \{\text{Error}\} \quad (2.6a)$$

$$\text{with respect to } \{\text{Working point, Path}\} \quad (2.6b)$$

$$\text{subject to } \{\text{Workspace}\} \quad (2.6c)$$

$$\text{under } \{\text{Load, Dynamic, Tolerance, Stiffness}\} \quad (2.6d)$$

根據前文的文獻回顧可知，目前機械手臂在最佳設計領域的研究方向相當的廣，包含最大化工作空間、最大化操作性、最小化最大力矩等等；而在路徑規劃領域與公差設計領域，可找到與本研究欲探討的目標相同的文獻，目標皆為最小化誤差，且均將公差與關節剛性造成的誤差列入考量，可見其對影響精度有一定的重要性，但文獻中僅探討機械手臂二維的狀況，並不貼近真實情形，且均未將公差與負重後造成的應力效果列入考量，經過比較之後可以發現，目前並無與本文欲探討的問題完全相符的文獻。

## 第三章 運動原理與理論基礎

在探討公差與韌性對機械手臂精度的影響之前，我們必須先設定機械手臂的參考座標，各桿件之間座標轉換以及順逆向運動學。本研究使用Denavit-Hartenberg (1955) 齊次轉換矩陣來計算各連桿之間的座標轉換矩陣，此方法必須先在各個接頭設定座標系。

### 3.1 座標系統與參數之定義

D-H齊次座標矩陣相當廣為使用於機械手臂之位置分析，而在進行位置分析之前，我們需要先了解機械手臂個連桿的座標系統與連桿參數如何定義。第  $i$  根連桿近端為  $i$  接頭，遠端為  $(i + 1)$  接頭，如圖 3.1 所示，而座標系統的制定需遵循以下規則：

1.  $z_i$  軸在第  $(i + 1)$  個接頭之軸線上，方向可任意制定。
2.  $x_i$  軸定義為第  $i$  個與第  $(i + 1)$  個接頭之軸線的公垂線方向。若兩接頭軸線平行， $x_i$  軸的位置可任選，只要遵守垂直兩軸線即可，若兩接頭軸線相交， $x_i$  軸的方向可定義為與  $z_{i-1} \times z_i$  同向或反向，而原點則在兩軸相交的位置。
3.  $y_i$  軸使用右手定則原理制定。

定義完機械手臂連桿的座標系統之後，接下來我們需定義四個連桿參數：

1.  $L_i$ ：兩相鄰接頭之軸線偏移距離， $L_i = |H_{i-1}O_i|$ 。
2.  $d_i$ ： $x_{i-1}$  與  $x_i$  軸間公垂線之距離，若，則  $d_i$  為正，相反則為負。
3.  $\alpha_i$ ：兩鄰近接頭軸線之夾角。
4.  $\theta_i$ ： $x_{i-1}$  與  $x_i$  軸間之夾角。

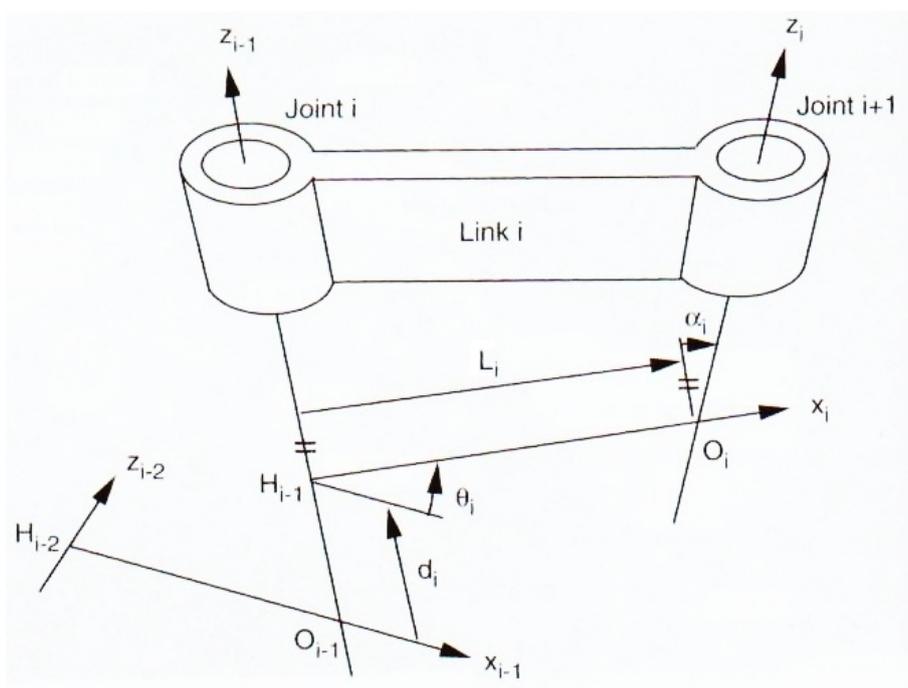


圖 3.1: 定義連桿參數 [14]

對於旋轉關節而言， $L_i$ 、 $d_i$ 、 $\alpha_i$  為常數， $\theta_i$  則為一個表示  $(i-1)$  桿與  $i$  桿間相對位置的變數。而對於滑動關節而言， $L_i$ 、 $\alpha_i$ 、 $\theta_i$  為常數， $d_i$  則為一個表示  $(i-1)$  桿與  $i$  桿間相對位置的變數。

## 3.2 D-H齊次轉換矩陣

建立完機械手臂各連桿的座標系統後，我們接著要建立一個  $4 \times 4$  的座標系轉換矩陣。參考圖 3.1，從  $(i-1)$  座標系統轉換至  $i$  座標系統需經下列四個步驟轉換：

**步驟1.**  $(i-1)$  座標系統沿著  $z_{i-1}$  軸平移  $d_i$ ，使座標原點  $O_{i-1}$  與  $H_{i-1}$  重合。對應的轉換矩陣為

$$T(z, d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

**步驟2.**  $(i-1)$  座標系統繞著  $z_{i-1}$  軸旋轉  $\theta_i$ ，使  $x_{i-1}$  和  $x_i$  同方向。對應的轉換矩陣為

$$T(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

步驟3.  $(i-1)$  座標系統沿著  $x_i$  軸平移  $L_i$ ，使座標原點  $O_{i-1}$  與  $O_i$  重合。對應的轉換矩陣為

$$T(x, L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

步驟4.  $(i-1)$  座標系統繞著  $z_{i-1}$  軸旋轉  $\alpha_i$ ，使兩座標系完全重合。對應的轉換矩陣為

$$T(x, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

將上述步驟1至4的四個矩陣依序相乘，便能夠得到由  $(i-1)$  座標系統轉換至  $i$  座標系統之轉換矩陣  ${}^{i-1}A_i$  如下

$${}^{i-1}A_i = T(z, d)T(z, \theta)T(x, L)T(x, \alpha) \quad (3.5)$$

將上式展開便得到

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & L_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & L_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

(3.6)式即稱為Denavit-Hartenberg (D-H) 齊次轉換矩陣，下標  $i$  與上標  $(i-1)$  代表此轉換矩陣將第  $i$  個座標系轉換至第  $(i-1)$  個座標系。

### 3.3 逆向運動學

機械手臂的運動學分為順向運動學以及逆向運動學，順向運動學是由已知的機械手臂各關節轉角求得末端位置，而逆向運動學則是由已知的手臂末端位置反過來求得機械手臂的各關節轉角。為求解順向運動學及逆向運動學，以下要介紹的是串聯式機械手臂的閉迴路方程式。假設現在有一個  $n$  個自由度的機械手臂，我們可依照 3.6 式推出各相鄰連桿間之座標轉換矩陣，將所有矩陣依序相乘，便能得到機械手臂基座與末端間的座標轉換矩陣如下

$${}^0A_n = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \dots {}^{n-1}A_n = \begin{bmatrix} u & v & w & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.7 式為串聯式機械手臂的閉迴路方程式，在矩陣右上的  $3 \times 1$  子矩陣  $q$  代表的是手臂末端位置相對座標系 0 的位置，左上的  $3 \times 3$  子矩陣  $u$ 、 $v$ 、 $w$  代表的是手臂末端相對座標系 0 的方向，為單位向量。閉迴路方程式包含了 16 個純量方程式，經由這些方程式我們便能夠求解順向運動學及逆向運動學。而在機械手臂的操作上，通常已知的條件為機械手臂的工作點，所以以下我們將舉一個簡單的 SCARA 機械手臂的例子，單就逆向運動學的問題來討論 [2]。

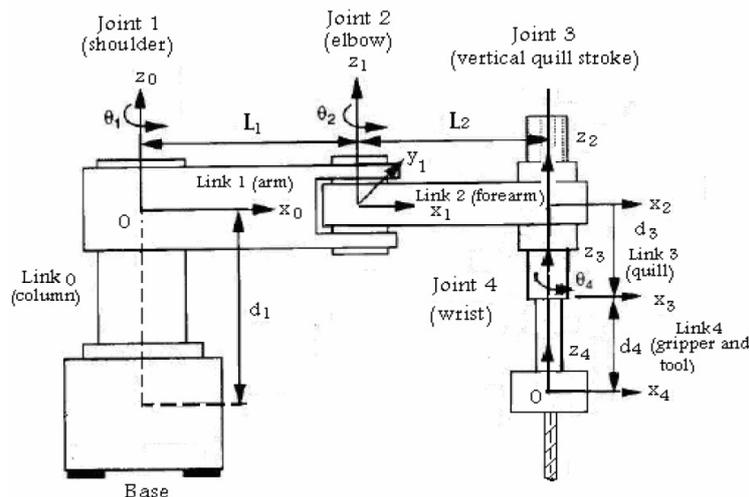


圖 3.2: SCARA 機械手臂的 D-H 參數示意圖 [2]

SCARA 機械手臂擁有四個自由度，第一、二、四關節為旋轉接頭，第三關節為滑動接頭，圖 3.2 為 SCARA 機械手臂的 D-H 參數示意圖，依照圖中所標示的各個座標系統，我們可以得到以下 D-H 參數之列表

表 3.1: SCARA機械手臂D-H參數列表

Joint i	$\alpha_i$	$L_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$L_1$	0	$\theta_1$
2	0	$L_2$	0	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	0	$d_4$	$\theta_4$

由表3.1所建立的D-H參數，我們可列出以下轉換矩陣

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & L_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & L_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & L_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

將上述四個矩陣依序相乘，便能夠得到SCARA機械手臂的總轉換矩陣如下

$${}^0A_4 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_{124} & -s\theta_{124} & 0 & L_1c\theta_1 + L_2c\theta_{12} \\ s\theta_{124} & c\theta_{124} & 0 & L_1s\theta_1 + L_2s\theta_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

將上述式子與閉迴路方程式對照

$${}^0A_n = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0A_4 \quad (3.13)$$

對照 3.12式與 3.13式的位置 (1, 4) 與 (2, 4)，我們可以得到下列二式

$$q_x = L_1c\theta_1 + L_2c\theta_{12} \quad (3.14)$$

$$q_y = L_1s\theta_1 + L_2s\theta_{12} \quad (3.15)$$

由 3.14式與 3.15式我們可以計算出 $\theta_2$

$$c\theta_2 = \frac{1}{2L_1L_2}(q_x^2 + q_y^2 - L_1^2 - L_2^2) \quad (3.16)$$

$$s\theta_2 = \pm\sqrt{1 - c\theta_2^2} \quad (3.17)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{s\theta_2}{c\theta_2} \quad (3.18)$$

將 3.14式與 3.15式重新排列可以得到

$$q_x = (L_1 + L_2\theta_2)c\theta_1 - (L_2s\theta_2)s\theta_1 \quad (3.19)$$

$$q_y = (L_2s\theta_2)c\theta_1 + (L_1 + L_2c\theta_2)s\theta_1 \quad (3.20)$$

使用克拉瑪定理我們可以求解 3.19式與 3.20式可以得到 $\theta_1$

$$\Delta = \begin{bmatrix} L_1 + L_2 c\theta_2 & -L_2 s\theta_2 \\ L_2 s\theta_2 & L_1 + L_2 c\theta_2 \end{bmatrix} = (L_1 + L_2 c\theta_2)^2 + (L_2 s\theta_2)^2 \quad (3.21)$$

$$\Delta s\theta_1 = \begin{bmatrix} L_1 + L_2 c\theta_2 & q_x \\ L_2 s\theta_2 & q_y \end{bmatrix} = (L_1 + L_2 c\theta_2)q_y - (L_2 s\theta_2)q_x \quad (3.22)$$

$$\Delta c\theta_1 = \begin{bmatrix} q_x & -L_2 s\theta_2 \\ q_y & L_1 + L_2 c\theta_2 \end{bmatrix} = (L_1 + L_2 c\theta_2)q_x + (L_2 s\theta_2)q_y \quad (3.23)$$

$$s\theta_1 = \frac{\Delta s\theta_1}{\Delta} = \frac{(L_1 + L_2 c\theta_2)q_y - (L_2 s\theta_2)q_x}{(L_1 + L_2 c\theta_2)^2 + (L_2 s\theta_2)^2} = \frac{(L_1 + L_2 c\theta_2)q_y - (L_2 s\theta_2)q_x}{q_x^2 + q_y^2} \quad (3.24)$$

$$c\theta_1 = \frac{\Delta c\theta_1}{\Delta} = \frac{(L_1 + L_2 c\theta_2)q_x + (L_2 s\theta_2)q_y}{(L_1 + L_2 c\theta_2)^2 + (L_2 s\theta_2)^2} = \frac{(L_1 + L_2 c\theta_2)q_x + (L_2 s\theta_2)q_y}{q_x^2 + q_y^2} \quad (3.25)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{s\theta_1}{c\theta_1} = \tan^{-1} \frac{(L_1 + L_2 c\theta_2)q_y - (L_2 s\theta_2)q_x}{(L_1 + L_2 c\theta_2)q_x + (L_2 s\theta_2)q_y} \quad (3.26)$$

對照 3.12式與 3.13式的位置 (4, 4)，可以求解 $d_3$

$$d_3 = -q_z - d_4 \quad (3.27)$$

為求得 $\theta_4$ ，我們將 3.12式兩邊同乘 $({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}$ 便能夠得到

$$({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1} {}^0A_4 = {}^3A_4 \quad (3.28)$$

將上式乘開即可得到

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} u_x c\theta_{12} + u_y s\theta_{12} & v_x c\theta_{12} + v_y s\theta_{12} & w_x c\theta_{12} + w_y s\theta_{12} & q_x c\theta_{12} + q_y s\theta_{12} - L_1 c\theta_1 - L_2 \\ -u_x s\theta_{12} + u_y c\theta_{12} & -v_x s\theta_{12} + v_y c\theta_{12} & -w_x s\theta_{12} + w_y c\theta_{12} & -q_x s\theta_{12} + q_y c\theta_{12} - L_1 s\theta_2 \\ u_z & v_z & w_z & q_z + d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

對照 3.11式與 3.29式的位置 (4, 4)，可以求解 $\theta_4$

$$c\theta_4 = u_x c\theta_{12} + u_y s\theta_{12} \quad (3.30)$$

$$s\theta_4 = -u_x s\theta_{12} + u_y c\theta_{12} \quad (3.31)$$

$$\theta_4 = \tan^{-1} \frac{s\theta_4}{c\theta_4} \quad (3.32)$$

依照逆向運動學之方法，我們便能夠由已知的手臂末端位置  $q$  求得SCARA機械手臂的各關節變數  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $d_3$ 、 $\theta_4$ 。



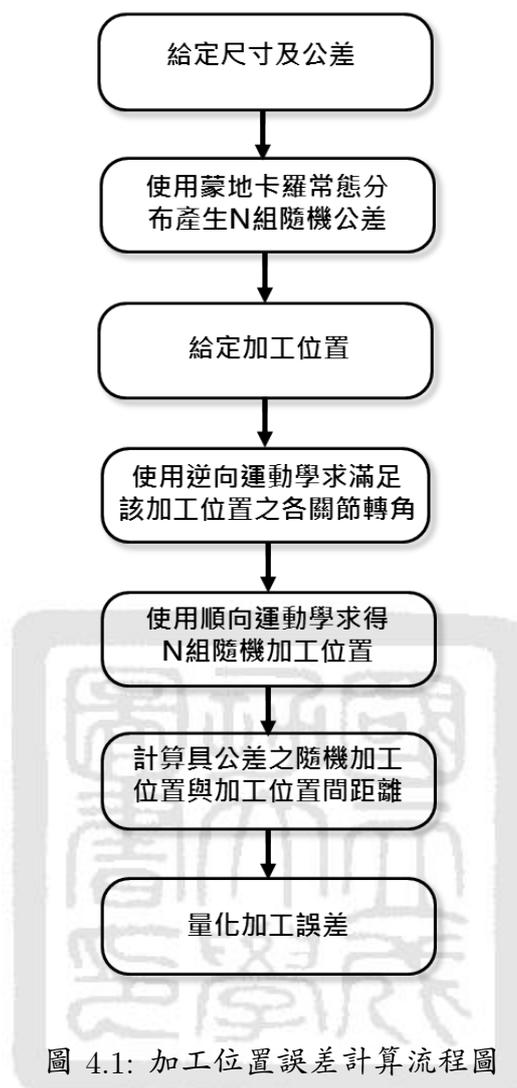
## 第四章 研究方法

藉由前一章所介紹的機械手臂的運動理論，當已知機械手臂末端位置時，經由逆向運動學能夠求出機械手臂各關節轉角；當已知機械手臂關節轉角時，經由順向運動學便能夠求出機械手臂末端位置。有此理論作為基礎後，本論文將探討尺寸公差、材料剛性與加工位置對最終加工精度的影響，在此本文將尺寸公差與材料剛性造成的誤差視為長度與角度的公差 $\Delta L$ 、 $\Delta\theta$ ，同時假設 $\Delta L$ 與 $\Delta\theta$ 之量值為已知，並不會針對關節剛性之來源及量化做深入探討。本章將針對下列幾點進行探討：

- 加工位置選擇對精度之影響：  
欲探討機械手臂存在長度與角度公差下，不同的加工位置之精度是否相同。
- 無負載下之加工位置最佳化：  
若不同加工位置之精度不相同，經由加工位置之選擇來提升加工精度。
- 有負載下之加工位置最佳化：  
探討機械手臂在負重的情況下，經由加工位置之選擇來提升加工精度。
- 無負載下之運動軌跡最佳化：  
若不同加工位置之精度不相同，可進而推估不同加工路徑之精度也不相同，經由加工位置之選擇來提升加工精度。
- 有負載下之運動軌跡最佳化：  
探討機械手臂在負重的情況下，經由加工路徑之選擇來提升加工精度。

### 4.1 加工位置選擇對精度之影響

當機械手臂機械手臂存在長度與角度公差下進行單點加工時，我們想先了解機械手臂在不同的加工或取物點之可達精度是否相同，以一平面SCARA機械手臂做為範例，流程圖如圖4.1，詳細計算步驟如展示於流程圖之後。



#### 步驟1. 給定機械手臂尺寸及公差：

圖4.2為一平面的SCARA機械手臂示意圖，給定機械手臂桿件尺寸 $L_1 = 150\text{mm}$ ， $L_2 = 150\text{mm}$ ，在此長度與角度之公差定為 $\Delta L = \pm 1\text{mm}$ ， $\Delta\theta = \pm 0.5^\circ$ ，此公差之制定與實際上情形不相同，目的是為了將結果的誤差放大來比較，故將公差放大來進行討論。

#### 步驟2. 使用蒙地卡羅方法產生N組隨機公差：

當已知公差之範圍後，使用蒙地卡羅方法（Monte Carlo method）在此產生 $N=10000$ 組公差亂數 $(\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r, i=1,2,\dots,10000)$ ，蒙地卡羅方法是一種數值方法，利用亂數取樣（Random sampling）模擬來解決數學問題，處理蒙地卡羅模擬時，通常需要符合某種特定分佈的亂數資料，因此就需要能夠符合特定分佈的亂數產生器，其中以常態分佈最常見，這是因為公差的產生在穩定的製程下應會呈現常態分佈，因此本文使用到蒙地卡羅方法時皆採常態分佈。

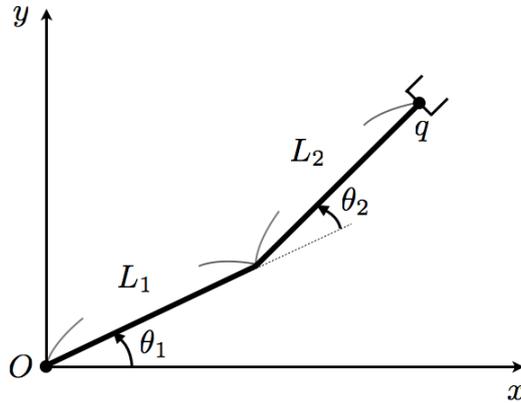


圖 4.2: 平面SCARA機械手臂示意圖

**步驟3. 給定加工位置：**

在此給定兩個不同的加工點做為比較依據， $q_1 = (100, 100)$ mm與 $q_2 = (200, 200)$ mm。

**步驟4. 使用逆向運動學求滿足該加工位置之各關節轉角：**

將給定的加工點位置  $(q_1, q_2)$  代入逆向運動學，便能夠得到關節轉角 $\theta_1$ 與 $\theta_2$ ，如圖4.2中所示位置。

**步驟5. 使用順向運動學求得N組隨機加工位置：**

求得關節轉角之後，我們將10000組公差隨機亂數  $(\Delta L_i^r, \Delta \theta_i^r)$  加入機械手臂之桿件長度與關節轉角，

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \Delta L_i^r \\ \theta &\rightarrow \theta + \Delta \theta_i^r \end{aligned} \quad (4.1)$$

再將此新的尺寸代入順向運動學，便可求得10000個具公差之隨機加工位置 $Q_i$ 。

**步驟6. 計算具公差之隨機加工位置與加工位置間距離：**

$$\varepsilon_i = \sqrt{(q_x - Q_{ix})^2 + (q_y - Q_{iy})^2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 10000 \quad (4.2)$$

其中 $q_x$ 、 $q_y$ 表示加工位置的 $x$ 、 $y$ 座標， $Q_{ix}$ 、 $Q_{iy}$ 表示具公差之隨機加工位置的 $x$ 、 $y$ 座標， $\varepsilon_i$ 則表示10000個隨機加工位置與加工位置間之距離。

**步驟7. 量化加工誤差：**

求得各具公差之隨機加工位置與加工位置間之距離後，我們使用了五種量化方式來呈現誤差，分別為最差表現、99%表現、95%表現、90%表現與平均表現，其中最差表現

表示 $N=10000$ 組距離中數值最大的一組，即為誤差最大值；99%、95%、90%表現表示誤差有99%、95%、90%的機率會落在此數值之內；平均表現表示所有距離之平均，計算方式分別如下

$$E_{max} = \text{Max}(\varepsilon_i) \quad (4.3a)$$

$$E_{99\%} = \text{Mean}(\varepsilon_i) + 2.575 * \text{std}(\varepsilon_i) \quad (4.3b)$$

$$E_{95\%} = \text{Mean}(\varepsilon_i) + 1.96 * \text{std}(\varepsilon_i) \quad (4.3c)$$

$$E_{90\%} = \text{Mean}(\varepsilon_i) + 1.645 * \text{std}(\varepsilon_i) \quad (4.3d)$$

$$E_{mean} = \text{Mean}(\varepsilon_i) = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{N} \quad (4.3e)$$

(4.3b)式到(4.3d)式中，std代表標準差，經由(4.3a)式到(4.3e)式之計算，可以得到表4.1兩個不同加工位置的加工誤差各級表現，由表可知當SCARA機械手臂存在長度與角度公差下，不同的加工位置之加工誤差並不相同。平面SCARA機械手臂為一個簡單的範例，實際上機械手臂的尺寸與角度會使得順逆向運動學間關係更加非線性且複雜，導致公差對精度的影響相對提升，故本文推估存在尺寸與角度公差的情況下，任何機械手臂都會符合此結果。

表 4.1: 不同加工位置之加工誤差各級表現

單位：mm	$q_1$ (100, 100)	$q_2$ (200, 200)
最差表現	2.27408	3.62164
99%表現	1.61603	2.25458
95%表現	1.39012	1.93151
90%表現	1.27441	1.76604
平均表現	0.67013	0.90190

## 4.2 無負載下之加工位置最佳化

由前一小節可以瞭解到，機械手臂存在公差時，於不同加工位置點加工之精度皆不相同，於是我們想經由加工點位置的選擇來改善加工精度，當機械手臂進行單一點加工時，如點焊、鎖螺絲等，精度改善之最佳化流程如圖4.3，本節忽略機械手臂自身質量做運算，考慮質量之計算將於下一節中討論，詳細計算步驟展示於流程圖之後。

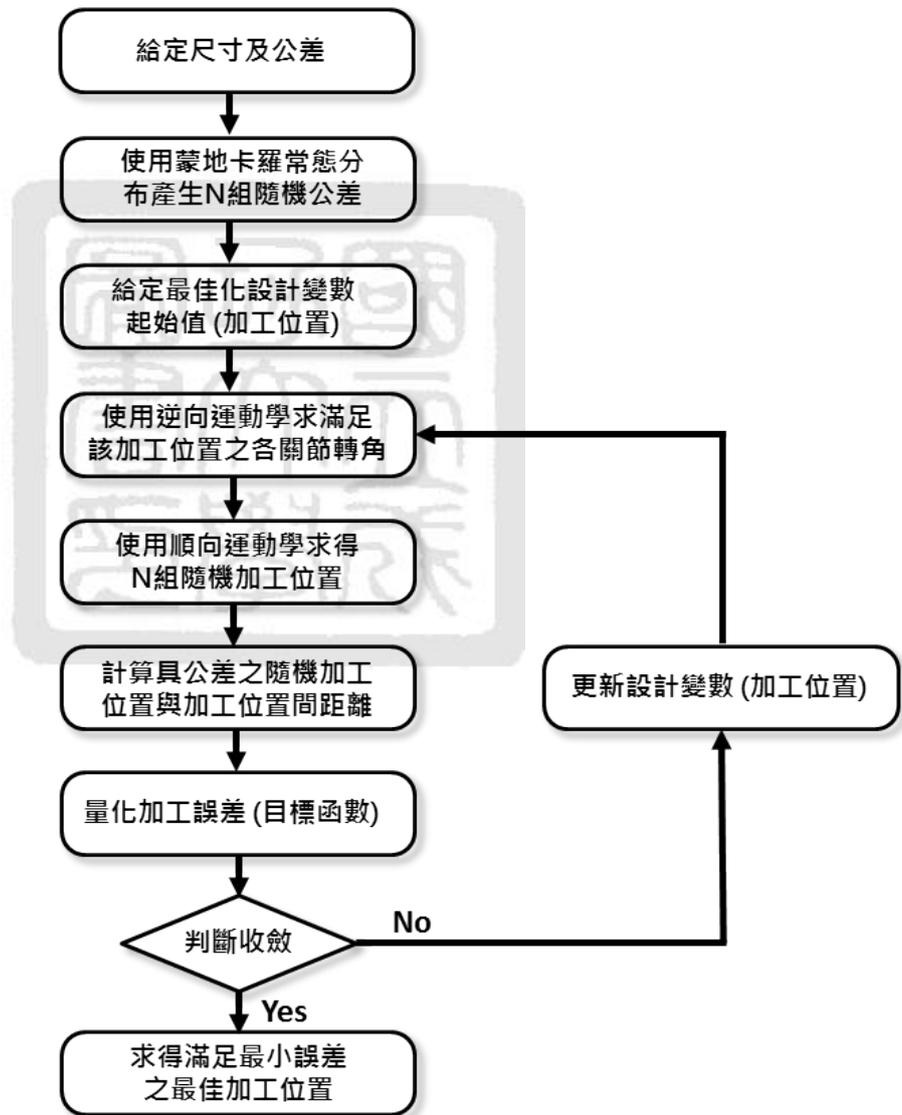


圖 4.3: 無負載下加工位置最佳化流程圖

**步驟1.** 給定機械手臂尺寸及公差：

給定機械手臂各桿件之長度 ( $L$ ) 及長度與角度公差範圍 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )。

**步驟2.** 使用蒙地卡羅方法產生N組隨機公差：

將已知公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ ) 使用蒙地卡羅常態分佈產生N組隨機公差 ( $\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r, i = 1, 2, \dots, N$ )。

**步驟3.** 給定最佳化設計變數起始值 (加工位置)：

我們想經由不同加工位置的選擇來尋找誤差最小的加工位置，進而提升加工精度，因此最佳化之數學模型可表示如下

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}} \quad & E(\mathbf{q}) \\ \text{subject to} \quad & g : \mathbf{q}, \mathbf{Q}_i \in W \\ & \text{where } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中設計變數為最佳加工點位置 ( $q$ )，目標函數為欲最佳化之誤差表現 ( $E$ )， $Q_i$  表示N個具公差之隨機加工位置， $W$  代表機械手臂的工作空間，拘束條件為所有的點需在機械手臂的工作空間內，此最佳化數學模型經由MATLAB之fmincon最佳化演算法進行計算，在fmincon最佳化演算法中，需要先給定設計變數之起始值，在此即為加工位置，以 $q_0$ 表示。

**步驟4.** 使用逆向運動學求滿足該加工位置之各關節轉角：

將設計變數起始值 $q_0$ 代入逆向運動學，求得機械手臂各關節轉角 $\theta$ 。

**步驟5.** 使用順向運動學求得N組隨機加工位置：

經由步驟4求得關節轉角之後，將N組隨機公差 ( $\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r$ ) 加入機械手臂之桿件長度與關節轉角，

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \Delta L_i^r \\ \theta &\rightarrow \theta + \Delta\theta_i^r \end{aligned} \quad (4.5)$$

再將此新的尺寸代入順向運動學，便可求得N個具公差之隨機加工位置 $Q_i$ 。

**步驟6.** 計算具公差之隨機加工位置與加工位置間距離：

$$\varepsilon_i = \sqrt{(q_x - Q_{ix})^2 + (q_y - Q_{iy})^2 + (q_z - Q_{iz})^2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

其中 $q_x, q_y, q_z$ 表示加工位置的 $x, y, z$ 座標， $Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{iz}$ 表示具公差之隨機加工位置的 $x, y, z$ 座標， $\varepsilon_i$ 則表示N個隨機加工位置與加工位置間之距離。

步驟7. 量化加工誤差（目標函數 $E$ ）：

在此目標函數 $E$ 以最差表現及平均表現表示，分別為(4.7a)式與(4.7b)式。

$$E_{max} = \text{Max}(\varepsilon_i) \quad (4.7a)$$

$$E_{mean} = \text{Mean}(\varepsilon_i) = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{N} \quad (4.7b)$$

步驟8. 判斷是否收斂：

如果未收斂便更新設計變數 $q$ 並重複步驟4~7，若收斂便進入步驟9。

步驟9. 求得滿足最小誤差（ $E^*$ ）之最佳加工點位置（ $q^*$ ）。

當機械手臂存在尺寸公差與剛性造成之誤差時進行單點加工，經由上述步驟進行計算，便能在不增加成本的情況下，經由加工位置的選擇進而提升機械手臂的加工精度。



### 4.3 有負載下之加工位置最佳化

前一小節介紹了機械手臂進行單點加工時，提升機械手臂的加工精度之最佳化模型，本節將4.2節忽略之機械手臂自身質量與末端位置抓取物體時之負重列入考量。當機械手臂呈現靜止時，各桿件與負重之重量會對各關節產生應力及應變，當機械手臂關節開始轉動，切線與法線方向之作用力亦會對關節產生應力及應變，而上述之應變便會造成誤差量的產生，在此本文將此誤差稱為「動態誤差」，而動態誤差亦為影響加工精度的因素之一，必須將其加入討論，加入動態誤差的部分為本節與前一小節之主要差異，計算流程如圖4.4，詳細計算步驟展示於流程圖之後。

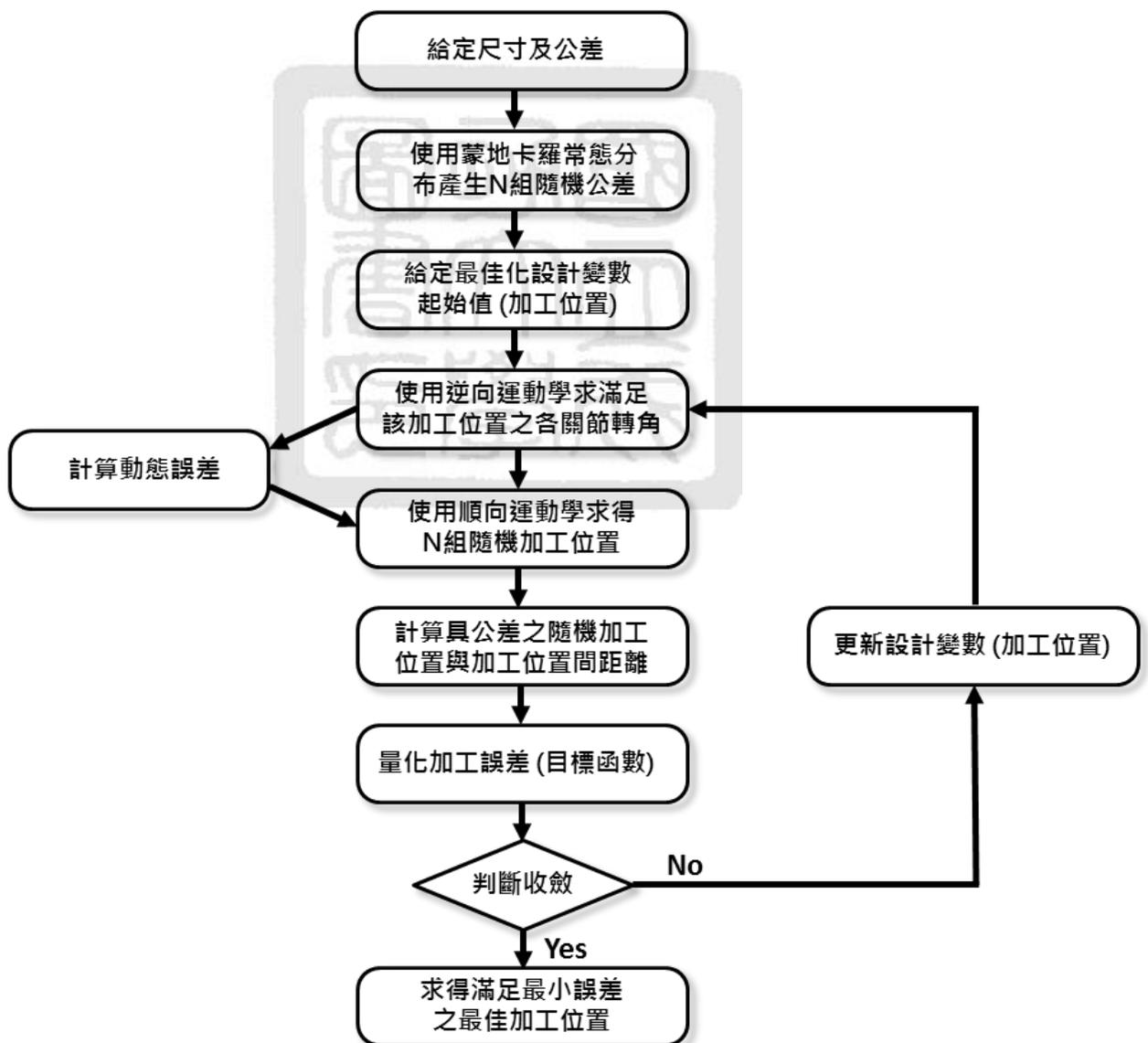


圖 4.4: 有負載下加工位置最佳化流程圖

**步驟1.** 給定機械手臂尺寸及公差：

給定機械手臂各桿件之長度與質量 ( $L, m$ ) 及長度與角度公差範圍 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )。

**步驟2.** 使用蒙地卡羅方法產生N組隨機公差：

將已知公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ ) 使用蒙地卡羅常態分佈產生N組隨機公差 ( $\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r, i = 1, 2, \dots, N$ )。

**步驟3.** 給定最佳化設計變數起始值 (加工位置)：

我們想經由不同加工位置的選擇來尋找誤差最小的加工位置，進而提升加工精度，最佳化數學模型與前一小節所述相同

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{q}} \quad & E(\mathbf{q}) \\ \text{subject to} \quad & g : \mathbf{q}, \mathbf{Q}_i \in W \\ \text{where} \quad & i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中設計變數為最佳加工點位置 ( $q$ )，目標函數為欲最佳化之誤差表現 ( $E$ )， $Q_i$  表示N個具公差之隨機加工位置， $W$  代表機械手臂的工作空間，拘束條件為所有的點需在機械手臂的工作空間內，fmincon最佳化演算法中，需要先給定設計變數之起始值，在此即為加工位置，以 $q_0$ 表示。

**步驟4.** 使用逆向運動學求滿足該加工位置之各關節轉角：

將設計變數起始值 $q_0$ 代入逆向運動學，求得機械手臂各關節轉角 $\theta$ 。

**步驟5.** 計算動態誤差值：

此步驟為新增之步驟，在加入機械手臂本身質量及負重後，計算其產生之動態誤差 ( $dL, d\theta$ )，並將其加入原尺寸與關節轉角。

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + dL \\ \theta &\rightarrow \theta + d\theta \end{aligned} \quad (4.9)$$

**步驟6.** 使用順向運動學求得N組隨機加工位置：

經由步驟5計算動態誤差並加入原尺寸與關節轉角後，將N組隨機公差 ( $\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r$ ) 加入更新後之尺寸，

$$\begin{aligned} L + dL &\rightarrow L + dL + \Delta L_i^r \\ \theta + d\theta &\rightarrow \theta + d\theta + \Delta\theta_i^r \end{aligned} \quad (4.10)$$

再將此新的尺寸代入順向運動學，便可求得N組具公差之隨機加工位置 $Q_i$ 。

步驟7. 計算具公差之隨機加工位置與加工位置間距離：

$$\varepsilon_i = \sqrt{(q_x - Q_{ix})^2 + (q_y - Q_{iy})^2 + (q_z - Q_{iz})^2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (4.11)$$

步驟8. 量化加工誤差（目標函數 $E$ ）：

在此目標函數 $E$ 以最差表現及平均表現表示，分別為(4.12a)式與(4.12b)式。

$$E_{max} = \text{Max}(\varepsilon_i) \quad (4.12a)$$

$$E_{mean} = \text{Mean}(\varepsilon_i) = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i}{N} \quad (4.12b)$$

步驟9. 判斷是否收斂：

如果未收斂便更新設計變數 $q$ 並重複步驟4~8，若收斂便進入步驟10。

步驟10. 求得滿足最小誤差（ $E^*$ ）之最佳加工點位置（ $q^*$ ）。

當機械手臂存在尺寸公差與剛性造成之誤差時進行單點載重加工，經由上述步驟進行計算，便能在不增加成本的情況下，經由加工位置的選擇進而提升機械手臂的加工精度，本節的計算中考量了機械手臂本身質量與負重造成的動態誤差。

## 4.4 無負載下之運動軌跡最佳化

當機械手臂進行多點加工時，其加工路徑可能為複雜的多次曲線，由4.1節可知不同的加工點位置會有不同的加工精度，於是我們進而推估，不同的加工路徑也會有不同的加工精度，希望能夠經由加工路徑的選擇達到加工點精度的提升，在此本文假設加工路徑函數之形式為已知條件，並忽略機械手臂自身質量做運算，考慮質量之計算將於下一節中討論，最佳化流程如圖4.5，詳細計算步驟展示於流程圖之後。

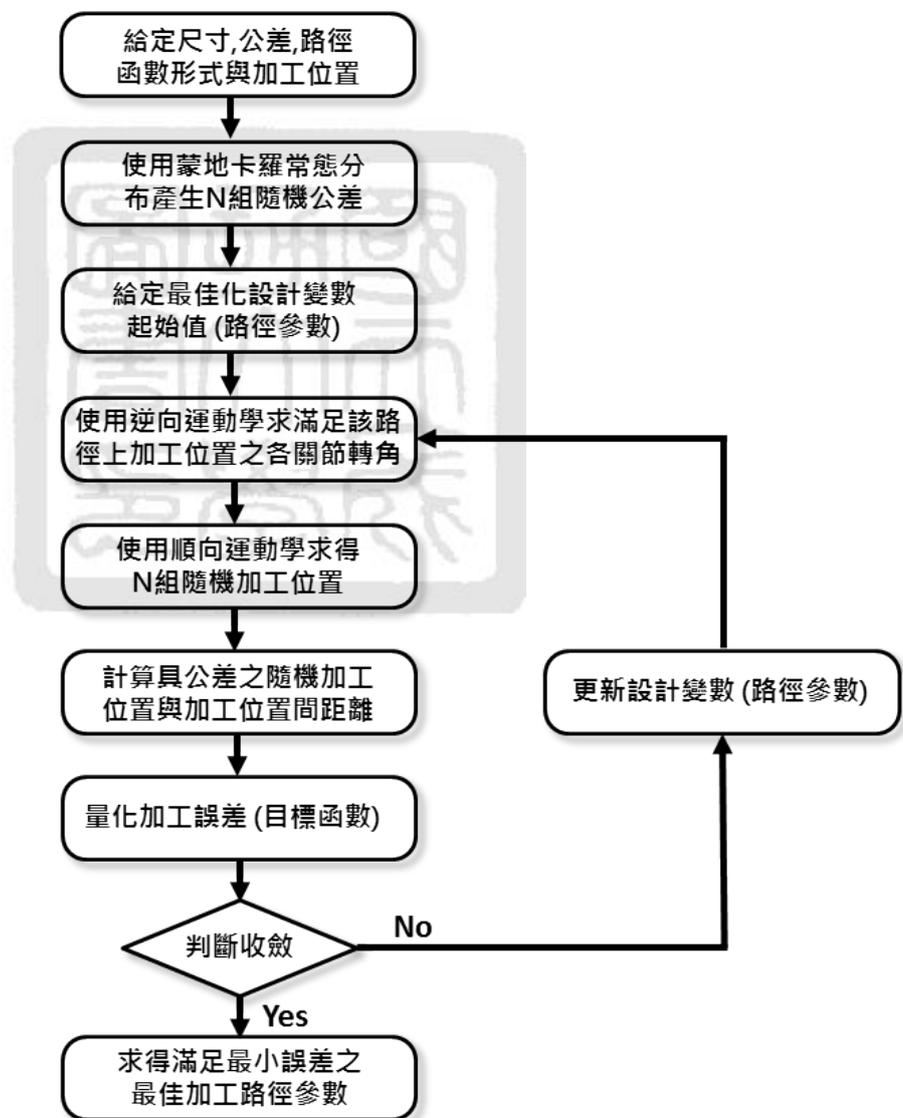


圖 4.5: 無負載下運動軌跡最佳化流程圖

**步驟1.** 給定機械手臂尺寸、公差、路徑函數形式與加工位置：

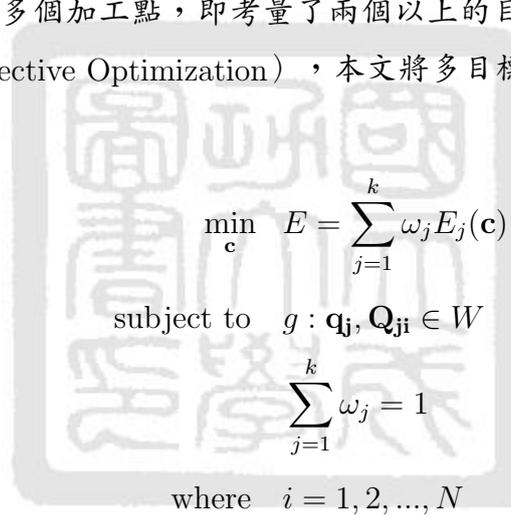
給定機械手臂各桿件之長度 ( $L$ )、長度與角度公差範圍 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、路徑函數形式及加工位置 ( $q_1, \dots, q_j$ )。

**步驟2.** 使用蒙地卡羅方法產生N組隨機公差：

將已知公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ ) 使用蒙地卡羅常態分佈產生N組隨機公差 ( $\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r, i = 1, 2, \dots, N$ )。

**步驟3.** 給定最佳化設計變數起始值 (加工路徑參數)：

在本小節當中，因探討機械手臂多點加工，故將其路徑視為多次曲線，在已知路徑函數之形式下，我們想經由不同加工路徑的選擇來達到最小的加工誤差，進而提升加工精度。因本問題存在多個加工點，即考量了兩個以上的目標函數，故問題可視為多目標最佳化 (Multi-objective Optimization)，本文將多目標最佳化之數學模型以權重法表示如下



$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{c}} \quad & E = \sum_{j=1}^k \omega_j E_j(\mathbf{c}) \\
 \text{subject to} \quad & g : \mathbf{q}_j, \mathbf{Q}_{ji} \in W \\
 & \sum_{j=1}^k \omega_j = 1 \\
 \text{where} \quad & i = 1, 2, \dots, N \\
 & j = 1, 2, \dots, k
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

其中設計變數  $\mathbf{c}$  為最佳加工路徑參數，目標函數  $E$  為欲最佳化之誤差表現， $E_j$  表示第  $j$  個加工位置的誤差表現， $\omega_j$  為權重比例且其總和為 1， $q_j$  表示停留  $k$  個加工位置， $Q_{ji}$  表示每一個加工位置皆有  $N$  個具公差之隨機加工位置， $W$  則代表機械手臂的工作空間，拘束條件為所有的點需在機械手臂的工作空間內，此最佳化數學模型經由 MATLAB 之 `fmincon` 最佳化演算法進行計算，在 `fmincon` 最佳化演算法中，需要先給定設計變數之起始值，在此即為加工路徑參數，以  $\mathbf{c}_0$  表示。

**步驟4.** 使用逆向運動學求滿足該路徑上加工位置之各關節轉角：

將設計變數起始值  $\mathbf{c}_0$  代入，求得此路徑函數上與給定加工位置  $x$  座標 (或  $y$  座標) 相同之加工位置  $(q_{path})_j$ ，並以逆向運動學求解機械手臂到達  $(q_{path})_j$  位置的各關節轉角  $\theta$ 。

**步驟5.** 使用順向運動學求得N組隨機加工位置：

經由步驟4求得關節轉角之後，將N組隨機公差 ( $\Delta L_i^r, \Delta \theta_i^r$ ) 加入機械手臂之桿件長度與關節轉角，

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \Delta L_i^r \\ \theta &\rightarrow \theta + \Delta \theta_i^r \end{aligned} \quad (4.14)$$

再將此新的尺寸代入順向運動學，每一個路徑上的加工位置  $(q_{path})_j$  可求得N個具公差之隨機加工位置  $Q_{ji}$ 。

**步驟6.** 計算具公差之隨機加工位置與路徑上加工位置間距離：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ji} &= \sqrt{(q_{jx} - Q_{jix})^2 + (q_{jy} - Q_{jiy})^2 + (q_{jz} - Q_{jiz})^2}, \\ &\quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中  $q_{jx}$ 、 $q_{jy}$ 、 $q_{jz}$  表示第  $j$  個加工位置的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  座標， $Q_{jix}$ 、 $Q_{jiy}$ 、 $Q_{jiz}$  表示路徑上第  $j$  個加工位置經由蒙地卡羅法產生之具公差的第  $i$  個隨機加工位置的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  座標， $\varepsilon_{ji}$  則表示路徑上第  $j$  個路徑上的加工位置與第  $i$  個隨機加工位置間之距離。

**步驟7.** 量化加工誤差（目標函數  $E$ ）：

在此目標函數  $E$  為多個目標的權重組合，(4.13) 式中的  $E_j$  以最差表現及平均表現表示，分別為(4.16a)式與(4.16b)式。

$$(E_j)_{max} = \text{Max}(\varepsilon_{ji}) \quad (4.16a)$$

$$(E_j)_{mean} = \text{Mean}(\varepsilon_{ji}) = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_{ji}}{N} \quad (4.16b)$$

**步驟8.** 判斷是否收斂：

如果未收斂便更新設計變數  $c$  並重複步驟4~7，若收斂便進入步驟9。

**步驟9.** 求得滿足最小誤差  $E^*$  之最佳加工路徑參數  $c^*$ 。

當機械手臂存在尺寸公差與剛性造成之誤差時進行多點加工，且加工路徑函數形式為已知的狀況下，經由上述步驟進行計算，便能在不增加成本的情況下，經由加工路徑的選擇進而提升機械手臂的加工精度。

## 4.5 有負載下之運動軌跡最佳化

在4.4節中介紹了機械手臂進行多點加工時，提升機械手臂精度之最佳化模型，本節將考量機械手臂各桿件本身質量並納入機械手臂承載重量時之動態誤差，其最佳化數學模型與4.4節中所介紹的相同，不同之處在於計算流程當中，需加上考量動態誤差之步驟，其最佳化流程如圖4.6，詳細計算步驟展示於流程圖之後。

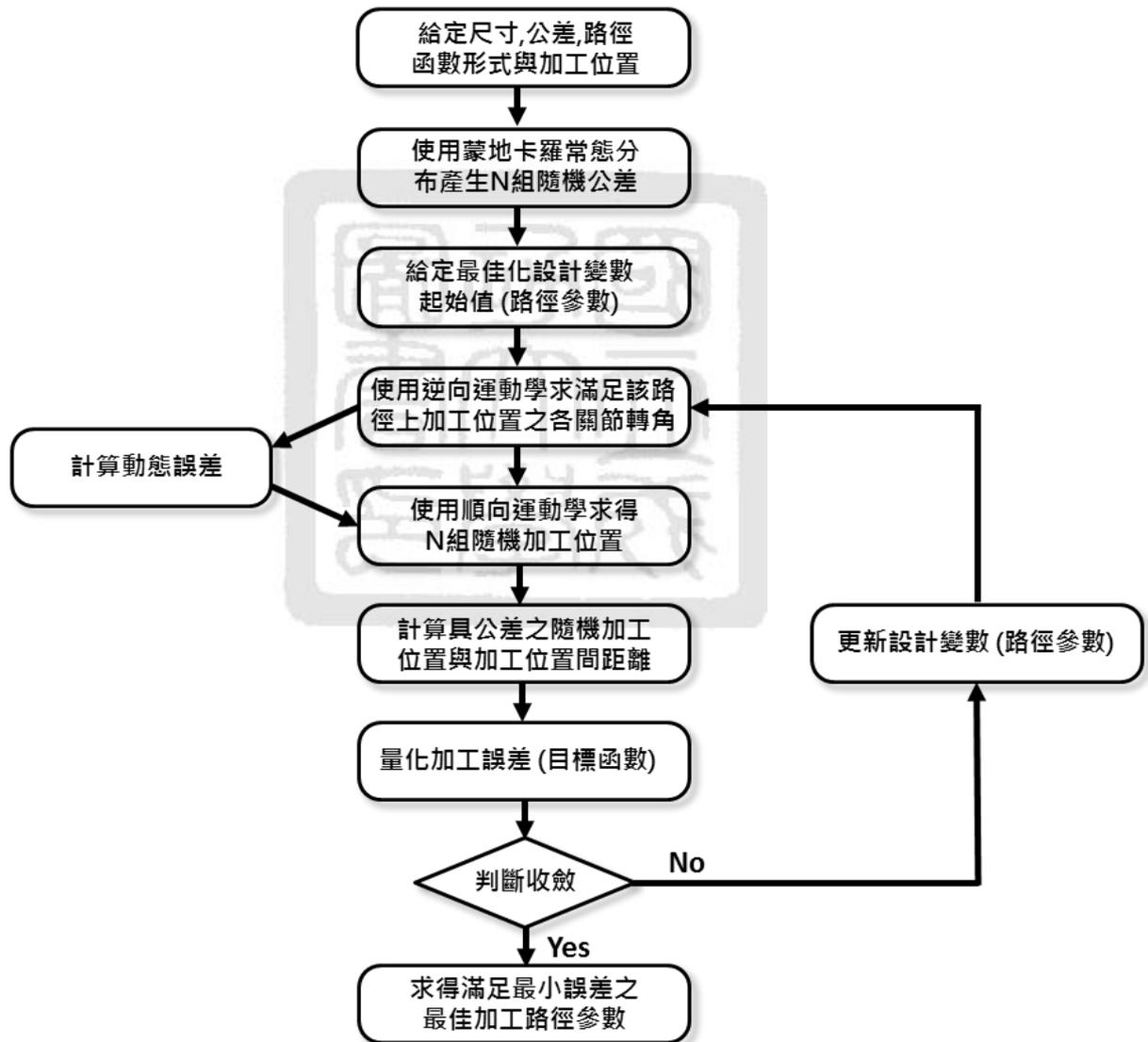


圖 4.6: 有負載下運動軌跡最佳化流程圖

**步驟1.** 給定機械手臂尺寸、公差、路徑函數形式與加工位置：

給定機械手臂各桿件之長度與質量  $(L, m)$ 、長度與角度公差範圍  $(\Delta L, \Delta\theta)$ 、路徑函數形式及加工位置  $(q_1, \dots, q_j)$ 。

**步驟2.** 使用蒙地卡羅方法產生N組隨機公差：

將已知公差  $(\Delta L, \Delta\theta)$  使用蒙地卡羅常態分佈產生N組隨機公差  $(\Delta L_i^r, \Delta\theta_i^r, i = 1, 2, \dots, N)$ 。

**步驟3.** 給定最佳化設計變數起始值（加工路徑參數）：

在此最佳化數學模型與(4.13)式相同，因本問題為探討「多點」加工下加工誤差最小之路徑參數，故以多目標最佳化表示如下

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}} \quad & E = \sum_{j=1}^k \omega_j E_j(\mathbf{c}) \\ \text{subject to} \quad & g : \mathbf{q}_j, \mathbf{Q}_{ji} \in W \\ & \sum_{j=1}^k \omega_j = 1 \\ \text{where} \quad & i = 1, 2, \dots, N \\ & j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中設計變數 $c$ 為最佳加工路徑參數，目標函數 $E$ 為欲最佳化之誤差表現， $E_j$ 表示第 $j$ 個加工位置的誤差表現， $\omega_j$ 為權重比例且其總和為1， $q_j$ 表示停留 $k$ 個加工位置， $Q_{ji}$ 表示每一個加工位置皆有 $N$ 個具公差之隨機加工位置， $W$ 則代表機械手臂的工作空間，拘束條件為所有的點需在機械手臂的工作空間內，在fmincon最佳化演算法中，需要先給定設計變數之起始值，在此即為加工路徑參數，以 $c_0$ 表示。

**步驟4.** 使用逆向運動學求滿足該路徑上加工位置之各關節轉角：

將設計變數起始值 $c_0$ 代入，求得此路徑函數上與給定加工位置 $x$ 座標（或 $y$ 座標）相同之加工位置 $(q_{path})_j$ ，並以逆向運動學求解機械手臂到達 $(q_{path})_j$ 位置的各關節轉角 $\theta$ 。

**步驟5.** 計算動態誤差值：

此步驟為新增之步驟，在加入機械手臂本身質量及負重後，計算其產生之動態誤差  $(dL, d\theta)$ ，並將其加入原尺寸與關節轉角。

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + dL \\ \theta &\rightarrow \theta + d\theta \end{aligned} \tag{4.18}$$

**步驟6.** 使用順向運動學求得N組隨機加工位置：

經由步驟5計算動態誤差並加入原尺寸與關節轉角後，將N組隨機公差（ $\Delta L_i^r$ 、 $\Delta \theta_i^r$ ）加入更新後之尺寸，

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + dL + \Delta L_i^r \\ \theta &\rightarrow \theta + d\theta + \Delta \theta_i^r \end{aligned} \quad (4.19)$$

再將此新的尺寸代入順向運動學，每一個路徑上的加工位置 $(q_{path})_j$ 可求得N個具公差之隨機加工位置 $Q_{ji}$ 。

**步驟7.** 計算具公差之隨機加工位置與路徑上加工位置間距離：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ji} &= \sqrt{(q_{jx} - Q_{jix})^2 + (q_{jy} - Q_{jiy})^2 + (q_{jz} - Q_{jiz})^2} \\ &\quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中 $q_{jx}$ 、 $q_{jy}$ 、 $q_{jz}$ 表示第j個加工位置的 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 座標， $Q_{jix}$ 、 $Q_{jiy}$ 、 $Q_{jiz}$ 表示路徑上第j個加工位置經由蒙地卡羅法產生之具公差的第i個隨機加工位置的 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 座標， $\varepsilon_{ji}$ 則表示路徑上第j個路徑上的加工位置與第i個隨機加工位置間之距離。

**步驟8.** 量化加工誤差（目標函數 $E$ ）：

在此目標函數 $E$ 為多個目標的權重組合，(4.17)式中的 $E_j$ 以最差表現及平均表現表示，分別為(4.21a)式與(4.21b)式。

$$(E_j)_{max} = \text{Max}(\varepsilon_{ji}) \quad (4.21a)$$

$$(E_j)_{mean} = \text{Mean}(\varepsilon_{ji}) = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_{ji}}{N} \quad (4.21b)$$

**步驟9.** 判斷是否收斂：

如果未收斂便更新設計變數 $c$ 並重複步驟4~8，若收斂便進入步驟10。

**步驟10.** 求得滿足最小誤差 $E^*$ 之最佳加工路徑參數 $c^*$ 。

當機械手臂存在尺寸公差與剛性造成之誤差時進行多點載重加工，且加工路徑函數形式為已知的狀況下，經由上述步驟進行計算，便能在不增加成本的情況下，經由加工路徑的選擇進而提升機械手臂的加工精度，本節的計算中考量了機械手臂本身質量與負重造成的動態誤差。

## 第五章 工程範例

本章將使用前一章所介紹的研究方法，以一水平式四軸機械手臂（SCARA）與一垂直式六軸機械手臂（Fanuc, S-900W）來進行範例演練，為方便比較兩種機械手臂之誤差，長度與角度公差將會給定相同的數值， $\Delta L = \pm 1 \text{ mm}$ 與 $\Delta\theta = \pm 0.5^\circ$ ，在此公差之制定與實際上情形不相同，目的是為了將結果的誤差放大來比較，故將公差放大來進行討論。

### 5.1 水平式四軸機械手臂（SCARA）

本節以一水平式四軸機械手臂（SCARA）進行範例演練，SCARA機械手臂擁有四個自由度，第一、二、四關節為旋轉接頭，第三關節為滑動接頭，圖5.1為SCARA機械手臂的示意圖。

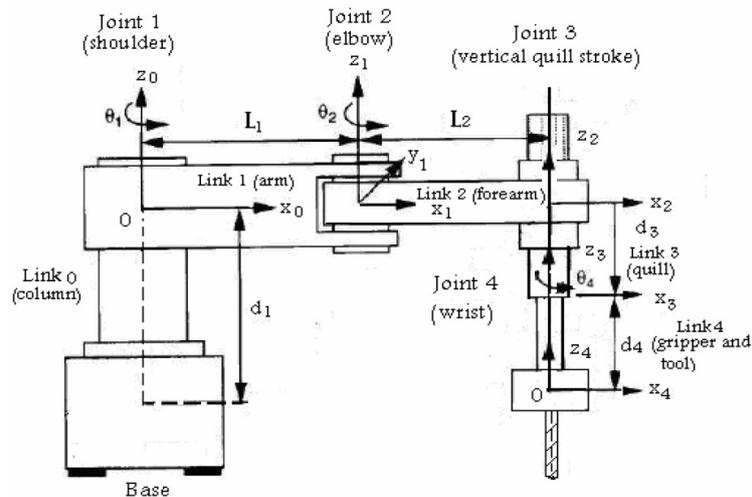


圖 5.1: SCARA機械手臂示意圖 [2]

### 5.1.1 無負載下之加工位置最佳化

當SCARA機械手臂存在長度與角度公差時，於不同加工位置點加工之精度皆不相同，於是欲經由加工點位置的選擇來改善加工精度，詳細內容與步驟已於4.2節當中介紹，最佳化數學模型與目標函數之最差表現及平均表現分別為(4.4)、(4.7a)與(4.7b)式，精度改善之最佳化流程可見圖4.3，本節忽略機械手臂自身質量做運算。

在進行無負載下之加工位置最佳化前，需先給定已知條件：機械手臂尺寸 ( $d_1, L_1, L_2, d_4$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ ) 及隨機公差個數 ( $N$ )，如表5.1所示，SCARA機械手臂之尺寸示意圖可見圖5.1。

表 5.1: SCARA機械手臂已知參數表

$d_1$	$L_1$	$L_2$	$d_4$	$\Delta L$	$\Delta\theta$	$N$
400 mm	150 mm	150 mm	100 mm	$\pm 1$ mm	$\pm 0.5^\circ$	10000

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可經由最佳化計算出加工誤差最小之加工位置，同時我們也計算出加工誤差最大之加工位置與前者進行比較，最佳化結果如下表，

表 5.2: SCARA無負載下最佳加工位置與最差加工位置比較

誤差表現	最小加工誤差	最大加工誤差	最佳加工位置	最差加工位置
最差表現	2.24994 mm	3.85639 mm	x : 105.7728 y : 52.8991 z : -100.0000	x : 212.0879 y : -212.0879 z : -100.0000
平均表現	0.73721 mm	1.05797 mm	x : -0.1219 y : 0.1219 z : -100.0000	x : -211.4836 y : 211.4836 z : -100.0000

表5.2中顯示，當誤差表現使用最差表現時，可能之最大加工誤差為3.85639 mm，若使用本研究方法進行搜尋，可將加工誤差降低41.7%縮小為2.24994 mm，而在平均表現當中，可能之最大加工誤差為1.05797 mm，最佳化結果可使得加工誤差降低30.3%縮小為0.73721 mm，由以上結果可得知，本研究方法經由加工位置之選擇的確能夠改善公差帶來的誤差。

平均表現表示在此最佳加工位置之平均誤差可達最小；最差表現表示在此最佳加工位置處加工，可確保所有同一公差範圍下的機械手臂加工誤差皆在此最小誤差範圍內。以圖5.2來做為簡單的說明依據，A點與B點分別為工作空間內不同的兩個加工位置，在機械手臂帶有公差的狀況下，其加工精度並不相同，分別在兩個加工位置各取20個具公差之隨機加工位置，可能呈現以下的情形：

A點平均表現 < B點平均表現

A點最差表現 > B點最差表現

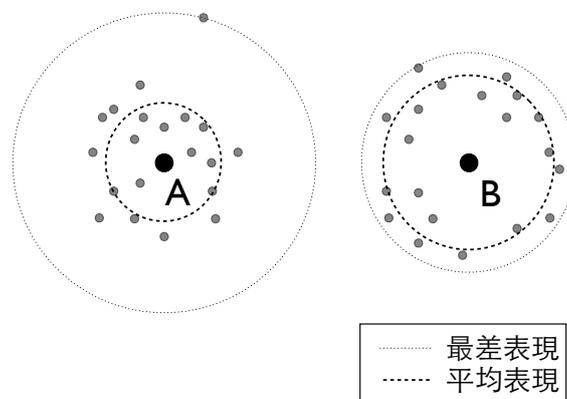
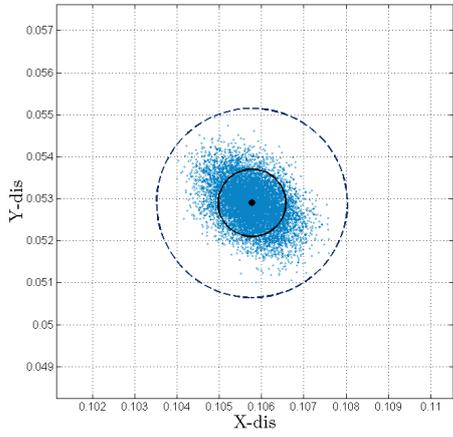


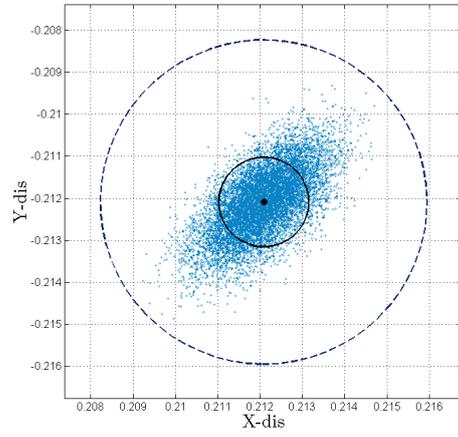
圖 5.2: 平均表現與最差表現比較圖

平均表現可提供整體之平均誤差值，且搜尋到的最佳加工位置之誤差較小，而最差表現搜尋到之最佳加工位置之誤差雖然較大，但是其可提供可能之最大誤差值，讓使用者可確保加工誤差不會超出此數值，故兩種誤差表現皆為重要的參考依據，可憑使用者之需求再進行選擇。

圖5.3與5.4將表5.2以圖5.2的方式呈現，以最佳加工位置為中心，外圈的虛線表示誤差的最差表現，內圈的實線表示誤差的平均表現，圖中的點表示具隨機公差的加工位置，從圖5.3與5.4可以很清楚的看出，以本研究方法求得的最佳加工位置，與擁有最大誤差的加工位置間的誤差相差非常大，本研究方法確實能夠經由加工位置的選擇有效的改善加工誤差。

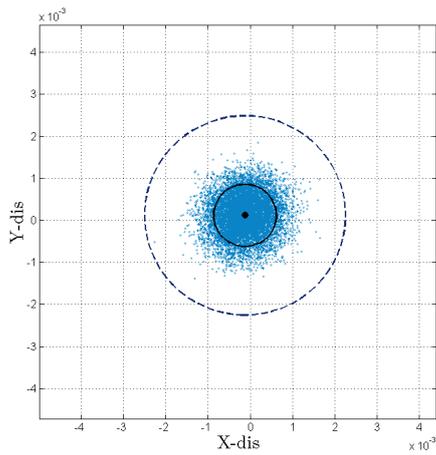


(a) 最小誤差

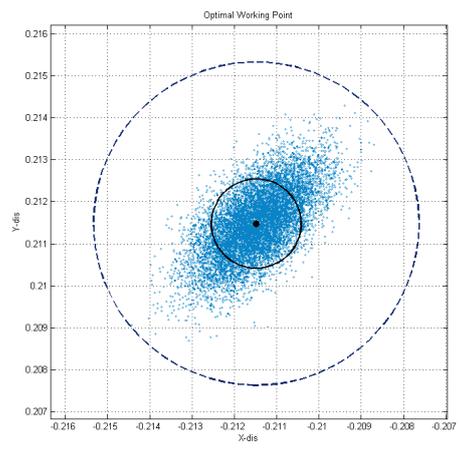


(b) 最大誤差

圖 5.3: SCARA最佳加工位置最差表現



(a) 最小誤差



(b) 最大誤差

圖 5.4: SCARA最佳加工位置平均表現

### 5.1.2 有負載下之加工位置最佳化

承接前一小節，當SCARA機械手臂載重時，經由前述之最佳化數學模型進行加工位置之最佳化，本節將機械手臂自身質量加入考量，並將其造成之動態誤差加入數學模型當中進行計算，動態誤差之詳細計算過程見附錄A。使用最佳化求解之前需先給定已知條件，本問題已知條件為：機械手臂各桿件長度 ( $d_1, L_1, L_2, d_4$ )、各桿件截面半徑 ( $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$ )、材料密度 ( $\rho$ )、經過時間 ( $T_{total}$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ ) 及負重質量 ( $m$ )，如表5.3所示。

表 5.3: SCARA機械手臂已知參數表

$d_1$	400 mm	$R_0$	150 mm	$\Delta L$	$\pm 1$ mm
$L_1$	150 mm	$R_1$	100 mm	$\Delta\theta$	$\pm 0.5^\circ$
$L_2$	150 mm	$R_2$	100 mm	$\rho$	7860 kg/m <sup>3</sup>
$d_4$	100 mm	$R_3$	80 mm	$T_{total}$	2 s
$N$	10000	$R_4$	80 mm	$m$	10 kg

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可經由最佳化計算出加工誤差最小之加工位置，同時我們也計算出加工誤差最大之加工位置與前者進行比較，最佳化結果如下表，

表 5.4: SCARA無負載下最佳加工位置與最差加工位置比較

誤差表現	最小加工誤差	最大加工誤差	最佳加工位置	最差加工位置
最差表現	2.25059 mm	3.85746 mm	x : 83.6437 y : -83.6450 z : -100.0010	x : -212.1692 y : 212.0921 z : -100.0000
平均表現	0.73722 mm	1.05956 mm	x : -0.1218 y : 0.1212 z : -100.0004	x : -212.1269 y : 212.1270 z : -100.0000

表5.2中顯示，當誤差表現使用最差表現時，可能之最大加工誤差為3.85746 mm，若使用本研究方法進行搜尋，可將加工誤差降低41.7%縮小為2.25059 mm，而在平均表現當中，

可能之最大加工誤差為1.05956 mm，最佳化結果可使得加工誤差降低30.4%縮小為0.73722 mm，圖5.5與5.6將表5.4以圖5.2的方式呈現，以最佳加工位置為中心，外圈的虛線表示誤差的最差表現，內圈的實線表示誤差的平均表現，圖中的點表示具隨機公差的加工位置，從圖5.5與5.6可以很清楚的看出，以本研究方法求得的最佳加工位置，與擁有最大誤差的加工位置間的誤差相差非常大，由以上結果可得知，本研究方法經由加工位置之選擇的確能夠改善公差帶來的誤差。

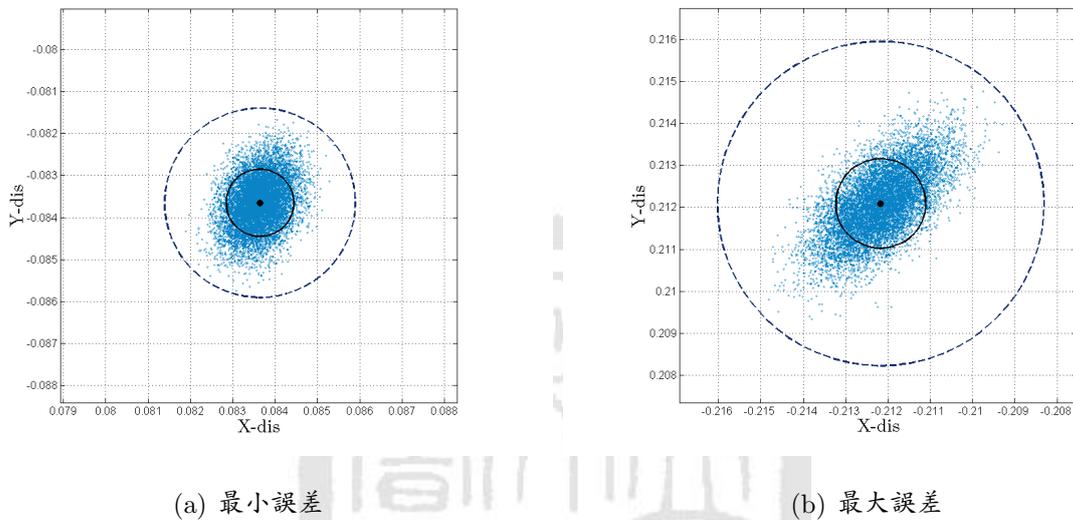


圖 5.5: SCARA有負載下最佳加工位置最差表現

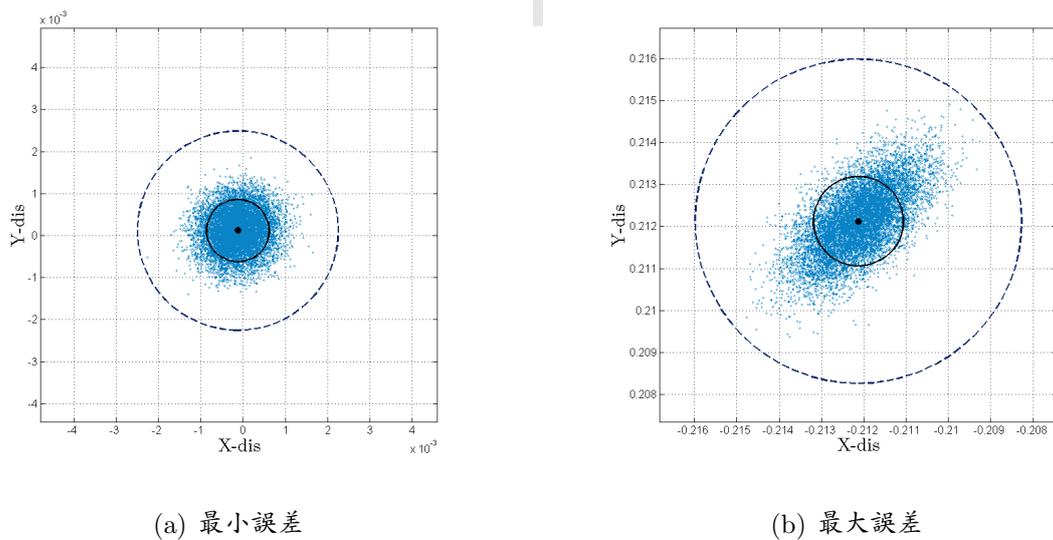


圖 5.6: SCARA有負載下最佳加工位置平均表現

### 5.1.3 無負載下之運動軌跡最佳化

當SCARA機械手臂存在長度與角度公差時，於不同加工路徑進行加工之精度皆不相同，於是本節欲經由加工路徑的選擇來改善加工精度，詳細內容與步驟已於4.4節當中介紹，最佳化數學模型與目標函數之最差表現及平均表現分別為(4.13)、(4.16a)與(4.16b)式，精度改善之最佳化流程如圖4.5，本節忽略機械手臂自身質量做運算，並假設路徑函數形式為已知條件。

在進行無負載下之運動軌跡最佳化前，需先給定已知條件：機械手臂尺寸 ( $d_1, L_1, L_2, d_4$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ ) 及總時間 ( $T_{total}$ )，如表5.5所示，假設SCARA機械手臂由靜止點(300,0,-100) mm啓動，首先考慮在路徑上停留一個加工位置  $q = (240, 140, -100)$  mm，而路徑函數形式假設為三次曲線  $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ 。

表 5.5: SCARA機械手臂已知參數表

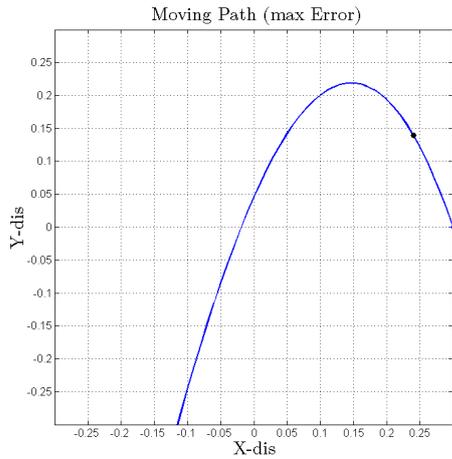
$d_1$	$L_1$	$L_2$	$d_4$	$\Delta L$	$\Delta\theta$	$N$	$T_{total}$
400 mm	150 mm	150 mm	100 mm	$\pm 1$ mm	$\pm 0.5^\circ$	10000	2 s

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可得到平均表現與最差表現之結果如表5.6，圖5.7分別為x-y平面上之運動軌跡最差表現與平均表現，

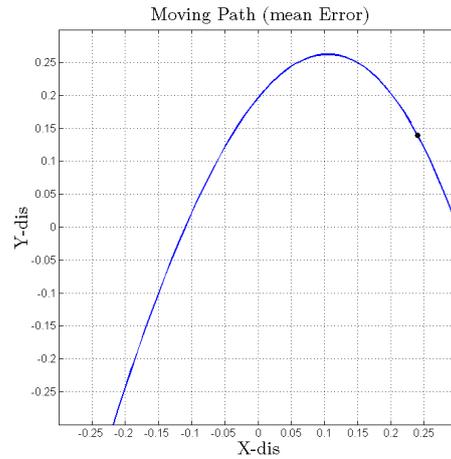
表 5.6: SCARA無負載單點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$
最差表現	[-4.1087 ; -6.8663 ; 2.2769 ; 0.0457 ]	3.5408 mm
平均表現	[-2.9208 ; -5.4121 ; 1.2323 ; 0.1964 ]	1.0208 mm

平均表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之平均誤差可達到最小；最差表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之誤差可達到最小，並且可確保所有同一公差範圍下的SCARA機械手臂之誤差皆在此最小誤差範圍內，比較兩個誤差表現可發現，因誤差表現設定的不同，最佳的加工路徑也不相同。



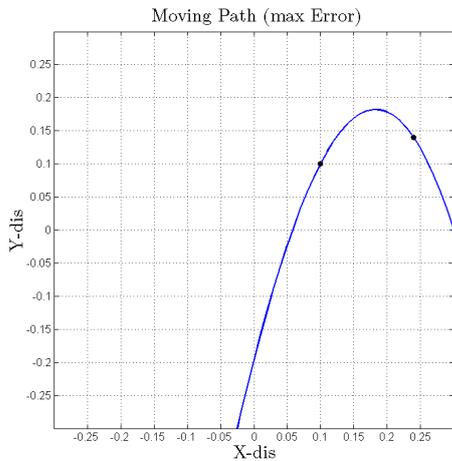
(a) 最差表現



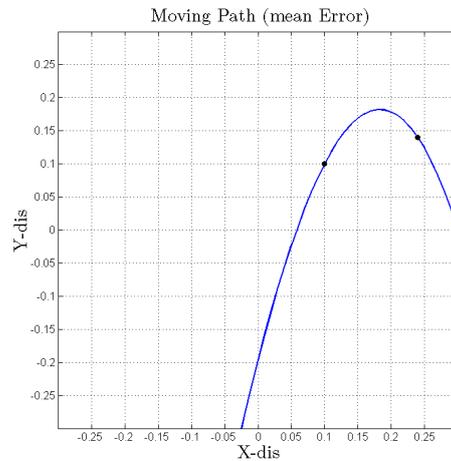
(b) 平均表現

圖 5.7: SCARA無負載單點加工最佳運動軌跡

其次考慮在路徑上停留兩個加工位置： $q_1 = (240, 140, -100)$  mm與 $q_2 = (100, 100, -100)$  mm，當加工位置達到兩個以上，便使用多目標最佳化來求解，在進行多目標求解的過程中，每一個目標須乘上一個權重，如果其中一個加工位置的精度較為重要，就將權重提高，其他加工位置的權重相對降低，在此將兩個加工位置的重要性視為相同，權重皆設為0.5。經過最佳化計算可得到平均表現與最差表現之結果如表5.7，各加工點的最小誤差也同時在表中一一列出，圖5.8分別為兩個加工點在x-y平面上的運動軌跡最差表現與平均表現，比較圖5.7與圖5.8可發現，加工路徑會隨著加工點的增加而改變。



(a) 最差表現



(b) 平均表現

圖 5.8: SCARA無負載多點加工最佳運動軌跡

表 5.7: SCARA無負載多點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$	$q_1$ 最小誤差	$q_2$ 最小誤差
最差表現	[ -6.4370 ; -8.9637 ; 3.9204 ; -0.1957 ]	2.9728 mm	3.5409 mm	2.4047 mm
平均表現	[ -6.2931 ; -9.0590 ; 3.9421 ; -0.1973 ]	0.9207 mm	1.0208 mm	0.8207 mm

爲了解最佳運動軌跡的結果是否有達到改善精度的效果，我們將採用多點加工的結果與無公差存在的理想路徑進行比較。理想狀況下未考慮公差的存在，給定已知加工位置與啓動位置，便能經由excel的多項式趨勢線選項擬和出加工路徑，但在實際情況下存在公差，理想的加工路徑不一定能夠達到加工誤差最小，以下爲兩者之比較：

表 5.8: SCARA無負載下理想與最佳路徑之比較

	理想路徑 最差表現	最佳路徑 最差表現	理想路徑 平均表現	最佳路徑 平均表現
$c_1$	0	-6.4370	0	-6.2931
$c_2$	-13.095	-8.9637	-13.095	-9.0590
$c_3$	4.7381	3.9204	4.7381	3.9421
$c_4$	-0.2429	-0.1957	-0.2429	-0.1973
$q_1$ 最小誤差(mm)	3.7033	3.5409	1.021343	1.0208
$q_2$ 最小誤差(mm)	2.4963	2.4047	0.821791	0.8207
最小誤差(mm)	3.0998	2.9728	0.921567	0.9207

在已知加工位置 $q_1 = (240, 140, -100)$  mm與 $q_2 = (100, 100, -100)$  mm以及啓動點(300,0,-100) mm的狀況下，經由excel多項式趨勢線可擬和出理想加工路徑爲 $y = -13.095x^2 + 4.7381x - 0.2429$ ，再將此路徑參數加入公差並計算加工誤差，表5.8中顯示，由本文提出的研究方法求出的最佳路徑之加工誤差，無論是最差表現或平均表現皆比理想路徑之加工誤差小，確實有達到經由路徑參數的選擇來改善加工位置誤差的效果。

### 5.1.4 有負載下之運動軌跡最佳化

承接前一小節，當SCARA機械手臂載重時，經由前述之最佳化數學模型進行加工路徑之最佳化，本節將機械手臂自身質量加入考量，並將其造成之動態誤差加入數學模型當中進行計算，SCARA機械手臂之動態誤差計算詳見附錄A。本問題已知條件如下：機械手臂各桿件長度 ( $d_1, L_1, L_2, d_4$ )、各桿件截面半徑 ( $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$ )、材料密度 ( $\rho$ )、總時間 ( $T_{total}$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ ) 及負重質量 ( $m$ )，如表5.9所示，假設SCARA機械手臂由靜止點(300,0,-100) mm啓動，首先考慮在路徑上停留一個加工位置  $q = (240, 140, -100)$  mm，而路徑函數形式假設為三次曲線  $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ 。

表 5.9: SCARA機械手臂已知參數表

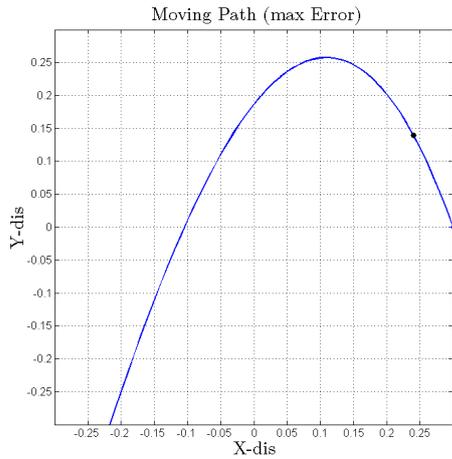
$d_1$	400 mm	$R_0$	150 mm	$\Delta L$	$\pm 1$ mm
$L_1$	150 mm	$R_1$	100 mm	$\Delta\theta$	$\pm 0.5^\circ$
$L_2$	150 mm	$R_2$	100 mm	$\rho$	7860 kg/m <sup>3</sup>
$d_4$	100 mm	$R_3$	80 mm	$T_{total}$	2 s
$N$	10000	$R_4$	80 mm	$m$	10 kg

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可得到平均表現與最差表現之結果如表??，圖5.9分別為x-y平面上之運動軌跡最差表現與平均表現，

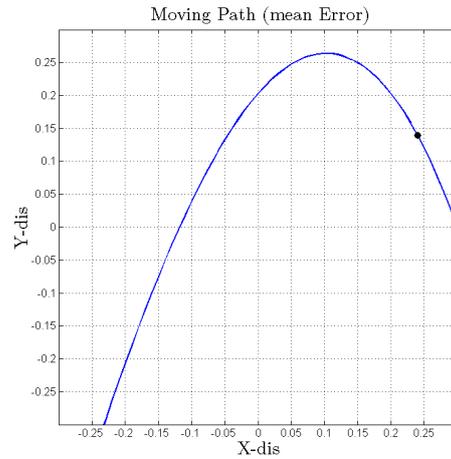
表 5.10: SCAR有負載單點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$
最差表現	[-3.4660 ; -5.2547 ; 1.2673 ; 0.1864 ]	3.4775 mm
平均表現	[-3.3092 ; -5.1156 ; 1.1574 ; 0.2026 ]	1.0209 mm

平均表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之平均誤差可達到最小；最差表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之誤差可達到最小，並且可確保所有同一公差範圍下的SCARA機械手臂之誤差皆在此最小誤差範圍內，比較兩個誤差表現，雖然加工路徑參數非常相近，但還是有些微的不相同。



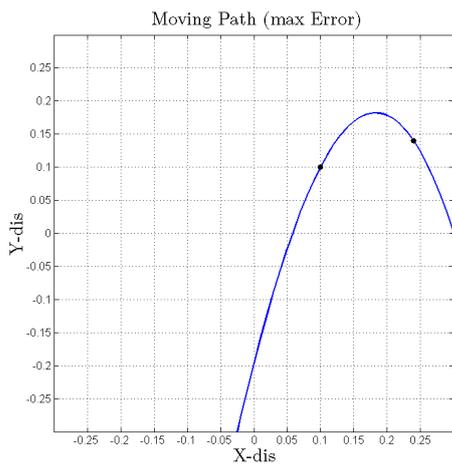
(a) 最差表現



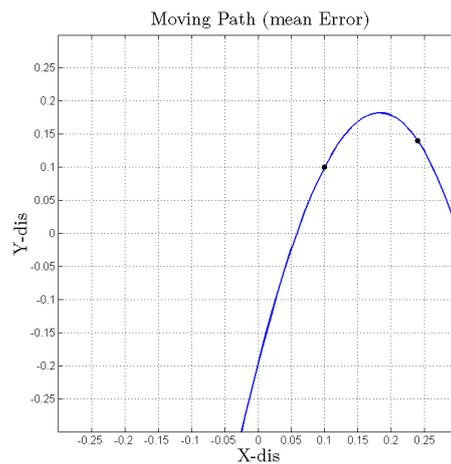
(b) 平均表現

圖 5.9: SCARA有負載單點加工最佳運動軌跡

其次考慮在路徑上停留兩個加工位置： $q_1 = (240, 140, -100)$  mm與 $q_2 = (100, 100, -100)$  mm，在多目標最佳化當中將兩個加工位置的重要性視為相同，權重皆設為0.5，經過多目標最佳化計算可得到平均表現與最差表現之結果如表5.11，各加工點的最小誤差也同時在表中一一列出，圖5.10分別為兩個加工點在x-y平面上的運動軌跡最差表現與平均表現，比較圖5.9與圖5.10可得到與前一小節相同的結果：加工路徑會隨著加工點的增加而改變。



(a) 最差表現



(b) 平均表現

圖 5.10: SCARA有負載多點加工最佳運動軌跡

表 5.11: SCARA有負載多點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$	$q_1$ 最小誤差	$q_2$ 最小誤差
最差表現	[ -6.2396 ; -9.0952 ; 3.9473 ; -0.1973 ]	2.9729 mm	3.5410 mm	2.4047 mm
平均表現	[ -6.4910 ; -8.9323 ; 3.9172 ; -0.1959 ]	0.9207 mm	1.0208 mm	0.8207 mm

爲了解最佳運動軌跡的結果是否有達到改善精度的效果，前一小節比較了理想路徑與最佳路徑之誤差，本節依然對其做比較如下：

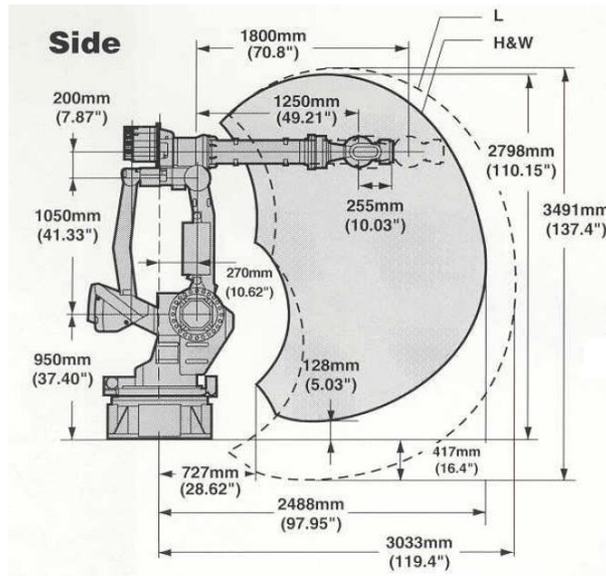
表 5.12: SCARA有負載下理想與最佳路徑之比較

	理想路徑 最差表現	最佳路徑 最差表現	理想路徑 平均表現	最佳路徑 平均表現
$c_1$	0	-6.2396	0	-6.4910
$c_2$	-13.095	-9.0952	-13.095	-8.9323
$c_3$	4.7381	3.9473	4.7381	3.9172
$c_4$	-0.2429	-0.1973	-0.2429	-0.1959
$q_1$ 最小誤差(mm)	3.7034	3.5410	1.021349	1.0208
$q_2$ 最小誤差(mm)	2.4962	2.4047	0.821796	0.8207
最小誤差(mm)	3.0998	2.9729	0.921572	0.9207

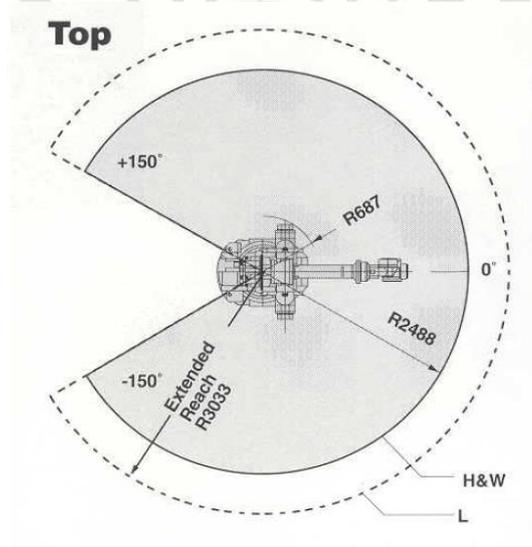
在已知加工位置 $q_1 = (240, 140, -100)$  mm與 $q_2 = (100, 100, -100)$  mm以及啓動點(300,0,-100) mm的狀況下，經由excel多項式趨勢線可擬和出理想加工路徑爲 $y = -13.095x^2 + 4.7381x - 0.2429$ ，再將此路徑參數加入公差並計算加工誤差，表5.12中顯示，由本文提出的研究方法求出的最佳路徑之加工誤差，無論是最差表現或平均表現皆比理想路徑之加工誤差小，確實有達到經由路徑參數的選擇來改善加工位置誤差的效果。

## 5.2 垂直式六軸機械手臂 (Fanuc, S-900W)

本節以一垂直式六軸機械手臂 (Fanuc, S-900W) 進行範例演練，圖5.11為S-900W的側視圖與上視圖，此款機械手臂為Fanuc公司製造出廠的一款機械手臂，其各關節結構由旋轉接頭與球接頭組成。



(a) S-900W側視圖



(b) S-900W上視圖

圖 5.11: S-900W機械手臂示意圖 [10]

### 5.2.1 逆向運動學求解

本節將介紹S-900W之逆向運動學求解方法 [14]，圖5.12為S-900W機械手臂的D-H參數示意圖，依照圖中所標示的各個座標系統，可以得到D-H參數之列表如表5.13，

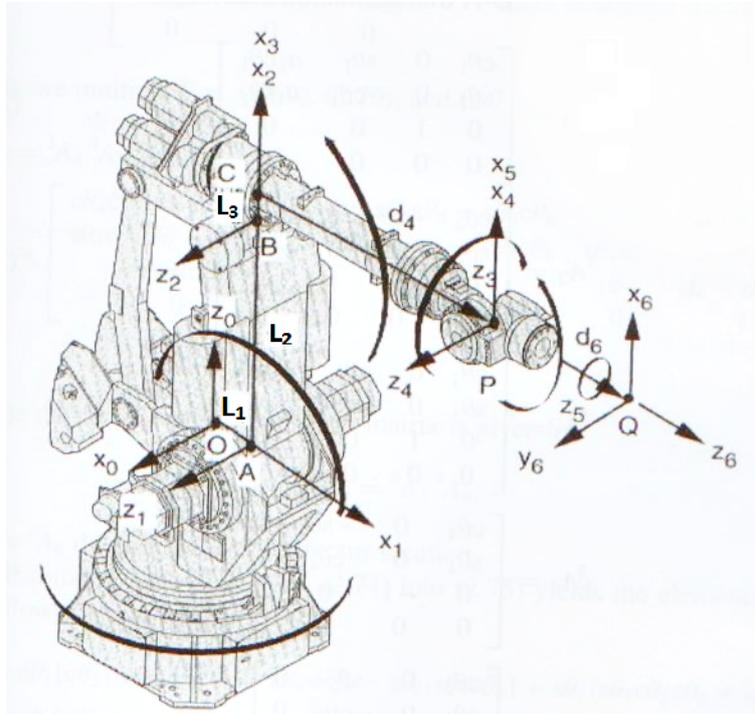


圖 5.12: S-900W機械手臂的D-H參數示意圖 [14]

表 5.13: SCARA機械手臂D-H參數列表

Joint i	$\alpha_i$	$L_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$\pi/2$	$L_1$	0	$\theta_1$
2	0	$L_2$	0	$\theta_2$
3	$\pi/2$	$L_3$	0	$\theta_3$
4	$-\pi/2$	0	$d_4$	$\theta_4$
5	$\pi/2$	0	0	$\theta_5$
6	0	0	$d_6$	$\theta_6$

由表5.13所建立的D-H參數，我們可列出以下轉換矩陣

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & L_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & L_1s\theta_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & L_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & L_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & L_3s\theta_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

機械手臂基座與末端間的座標轉換矩陣如下

$${}^0A_6 = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 {}^3A_4 {}^4A_5 {}^5A_6 = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

其中矩陣內的各元素如下

$$u_x = c\theta_1[c\theta_{23}(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6) - s\theta_{23}s\theta_5s\theta_6] + s\theta_1(s\theta_4c\theta_5c\theta_6 + c\theta_4s\theta_6) \quad (5.8a)$$

$$u_y = s\theta_1[c\theta_{23}(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6) - s\theta_{23}s\theta_5s\theta_6] - c\theta_1(s\theta_4c\theta_5c\theta_6 + c\theta_4s\theta_6) \quad (5.8b)$$

$$u_z = s\theta_{23}(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6) + c\theta_{23}s\theta_5c\theta_6 \quad (5.8c)$$

$$v_x = c\theta_1[-c\theta_{23}(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 + s\theta_4s\theta_6) + s\theta_{23}s\theta_5s\theta_6] + s\theta_1(-s\theta_4c\theta_5s\theta_6 + c\theta_4c\theta_6) \quad (5.8d)$$

$$v_y = s\theta_1[-c\theta_{23}(c\theta_4c\theta_5c\theta_6 + s\theta_4s\theta_6) + s\theta_{23}s\theta_5s\theta_6] - c\theta_1(-s\theta_4c\theta_5s\theta_6 + c\theta_4c\theta_6) \quad (5.8e)$$

$$v_z = -s\theta_{23}(c\theta_4c\theta_5s\theta_6 + s\theta_4c\theta_6) - c\theta_{23}s\theta_5s\theta_6 \quad (5.8f)$$

$$w_x = c\theta_1(c\theta_{23}c\theta_4s\theta_5 + s\theta_{23}c\theta_5) + s\theta_1s\theta_4s\theta_5 \quad (5.8g)$$

$$w_y = s\theta_1(c\theta_{23}c\theta_4s\theta_5 + s\theta_{23}c\theta_5) - c\theta_1s\theta_4s\theta_5 \quad (5.8h)$$

$$w_z = s\theta_{23}c\theta_4s\theta_5 - c\theta_{23}c\theta_5 \quad (5.8i)$$

$$q_x = c\theta_1[L_1 + L_2c\theta_2 + L_3c\theta_{23} + d_4s\theta_{23} + d_6(c\theta_{23}c\theta_4s\theta_5 + s\theta_{23}c\theta_5)] + d_6s\theta_1s\theta_4s\theta_5 \quad (5.8j)$$

$$q_y = s\theta_1[L_1 + L_2c\theta_2 + L_3c\theta_{23} + d_4s\theta_{23} + d_6(c\theta_{23}c\theta_4s\theta_5 + s\theta_{23}c\theta_5)] - d_6c\theta_1s\theta_4s\theta_5 \quad (5.8k)$$

$$q_z = L_2s\theta_2 + L_3s\theta_{23} - d_4c\theta_{23} + d_6(s\theta_{23}c\theta_4s\theta_5 - c\theta_{23}c\theta_5) \quad (5.8l)$$

經由已知的  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $q$ ，便能經由求解(5.8)式至(5.19)式求得未知的六個角度。

## 5.2.2 無負載下之加工位置最佳化

當S-900W機械手臂存在長度與角度公差時，於不同加工位置點加工之精度皆不相同，本節欲經由加工點位置的選擇來改善加工精度，詳細內容與步驟已於4.2節當中介紹，最佳化數學模型與目標函數之最差表現及平均表現分別為(4.4)、(4.7a)與(4.7b)式，精度改善之最佳化流程可見圖4.3，本節忽略機械手臂自身質量做運算。

在進行無負載下之加工位置最佳化前，需先給定已知條件：機械手臂各桿件長度 ( $L_1, L_2, L_3, d_4, d_6$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ ) 及末端位置方向向量 ( $u, v, w$ )，如表5.14所示，S-900W機械手臂之尺寸示意圖可見圖5.12，

表 5.14: S-900W機械手臂已知參數表

$L_1$	270 mm	$\Delta L$	$\pm 1$ mm
$L_2$	1050 mm	$\Delta\theta$	$\pm 0.5^\circ$
$L_3$	200 mm	$u$	(0, 0, 1)
$d_4$	1250 mm	$v$	(0, -1, 0)
$d_6$	255 mm	$w$	(1, 0, 0)
$N$	10000		

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可經由最佳化計算出加工誤差最小之加工位置，同時我們也計算出加工誤差最大之加工位置與前者進行比較，最佳化結果如下表，

表 5.15: S-900W無負載下最佳加工位置與最差加工位置比較

誤差表現	最小加工誤差	最大加工誤差	最佳加工位置	最差加工位置
最差表現	22.41545 mm	34.63418 mm	x : 1634.2740 y : 12.0757 z : 224.9997	x : 2488.0000 y : 50.0580 z : 1848.0000
平均表現	6.028198 mm	10.29241 mm	x : 255.0214 y : 1264.0110 z : 1848.0000	x : 2488.0000 y : 1078.4802 z : 1533.3587

表5.15中顯示，當誤差表現使用最差表現時，可能之最大加工誤差為34.63418 mm，若使用本研究方法進行搜尋，可將加工誤差降低35.3%，而在平均表現當中，可能之最大加工誤差為10.29241 mm，最佳化結果可使得加工誤差降低41.4%，圖5.13與5.14將表5.15以圖型的方式呈現，以最佳加工位置為中心，外圈的虛線表示誤差的最差表現，內圈的實線表示誤差的平均表現，圖中的點表示具隨機公差的加工位置，從圖5.13與5.14可以很清楚的看出，以本研究方法求得的最佳加工位置，與擁有最大誤差的加工位置間的誤差相差非常大，由以上結果可得知，本研究方法經由加工位置之選擇的確能夠有效的改善公差帶來的誤差。

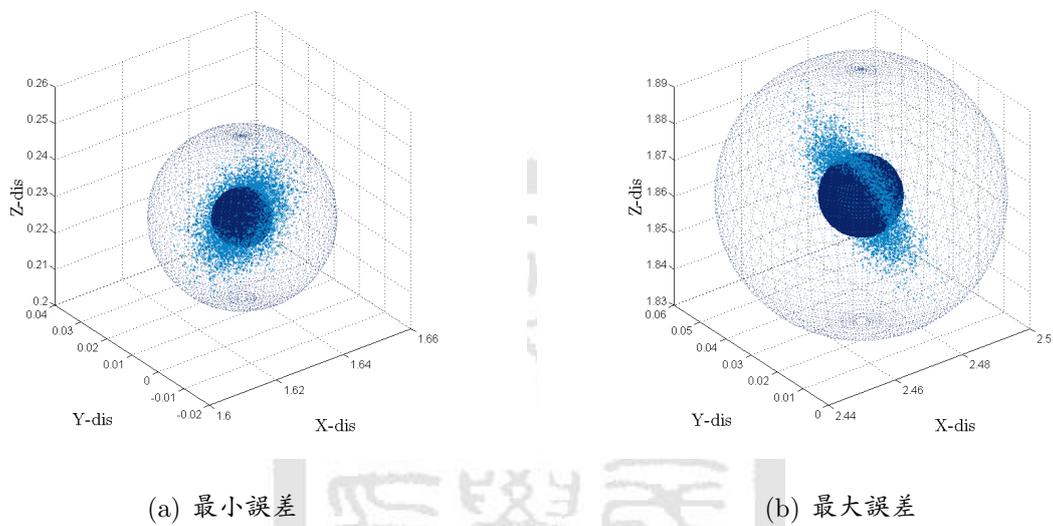


圖 5.13: S-900W最佳加工位置最差表現

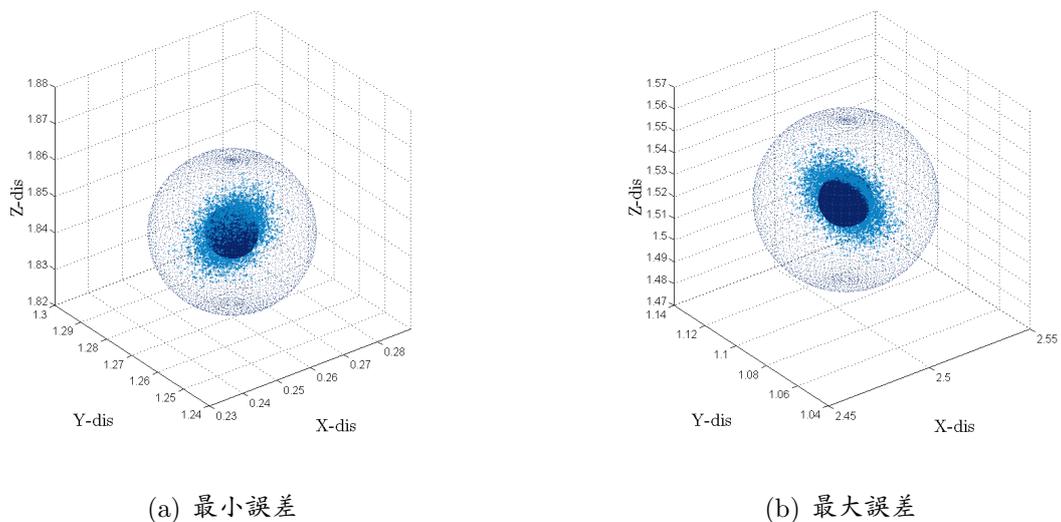


圖 5.14: S-900W最佳加工位置平均表現

### 5.2.3 有負載下之加工位置最佳化

承接前一小節，當S-900W機械手臂載重時，經由前述之最佳化數學模型進行加工位置之最佳化，本節將機械手臂自身質量加入考量，並將其造成之動態誤差加入數學模型當中進行計算，動態誤差之詳細計算過程見附錄B。使用最佳化求解之前需先給定已知條件，本問題已知條件為：機械手臂各桿件長度 ( $L_1, L_2, L_3, d_4, d_6$ )、各桿件截面半徑 ( $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ )、材料密度 ( $\rho$ )、經過時間 ( $T_{total}$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ )、末端位置方向向量 ( $u, v, w$ ) 及負重質量 ( $m$ )，如表5.16所示。

表 5.16: S-900W機械手臂已知參數表

$L_1$	270 mm	$R_1$	390 mm	$\Delta L$	$\pm 1$ mm	$u$	(0, 0, 1)
$L_2$	1050 mm	$R_2$	140 mm	$\Delta\theta$	$\pm 0.5^\circ$	$v$	(0, -1, 0)
$L_3$	200 mm	$R_3$	100 mm	$\rho$	7860 kg/m <sup>3</sup>	$w$	(1, 0, 0)
$d_4$	1250 mm	$R_4$	115 mm	$T_{total}$	2 s	$m$	20 kg
$d_6$	255 mm	$R_5$	115 mm	$N$	10000		

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可經由最佳化計算出機械手臂於負重下加工誤差最小之加工位置，同時我們也計算出加工誤差最大之加工位置與前者進行比較，最佳化結果如下表，

表 5.17: S-900W有負載下最佳加工位置與最差加工位置比較

誤差表現	最小加工誤差	最大加工誤差	最佳加工位置	最差加工位置
最差表現	23.07276 mm	36.94173 mm	x : 1499.3493 y : 24.6022 z : 1848.0000	x : 2488.0000 y : 887.5512 z : 1848.0000
平均表現	6.02355 mm	10.29244 mm	x : 255.0097 y : 1262.1841 z : 1848.0000	x : 2488.0000 y : 1078.4827 z : 1533.3490

表5.17中顯示，當誤差表現使用最差表現時，可能之最大加工誤差為36.94173 mm，若使用本研究方法進行搜尋，可將加工誤差降低37.5%，而在平均表現當中，可能之最大加工誤差為10.29244 mm，最佳化結果可使得加工誤差降低41.5%，圖5.15與5.16將表5.17以圖型的

方式呈現，以最佳加工位置為中心，外圈的虛線表示誤差的最差表現，內圈的實線表示誤差的平均表現，圖中的點表示具隨機公差的加工位置，從圖5.15與5.16可以很清楚的看出，以本研究方法求得的最佳加工位置，與擁有最大誤差的加工位置間的誤差相差非常大，由以上結果可得知，本研究方法經由加工位置之選擇的確能夠有效的改善公差帶來的誤差。

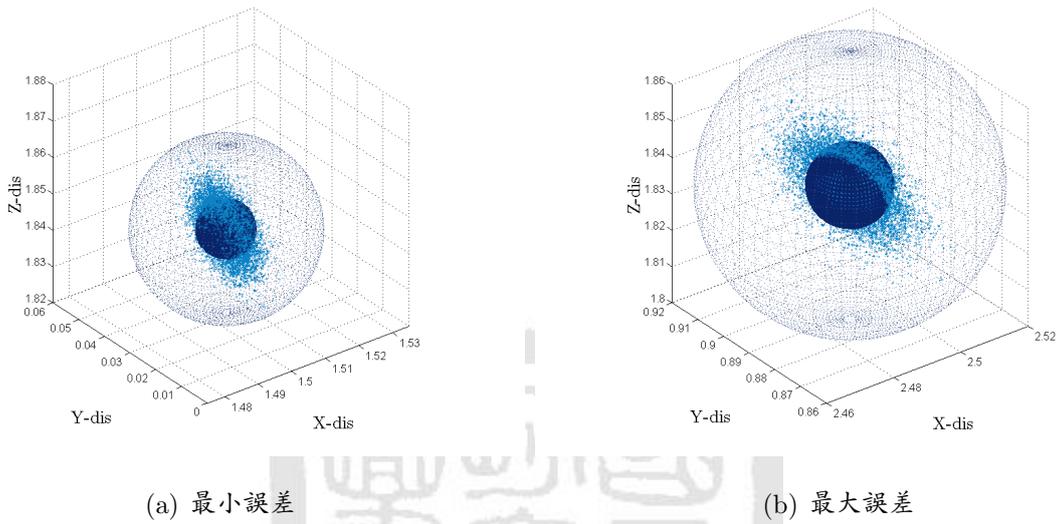


圖 5.15: S-900W最佳加工位置最差表現

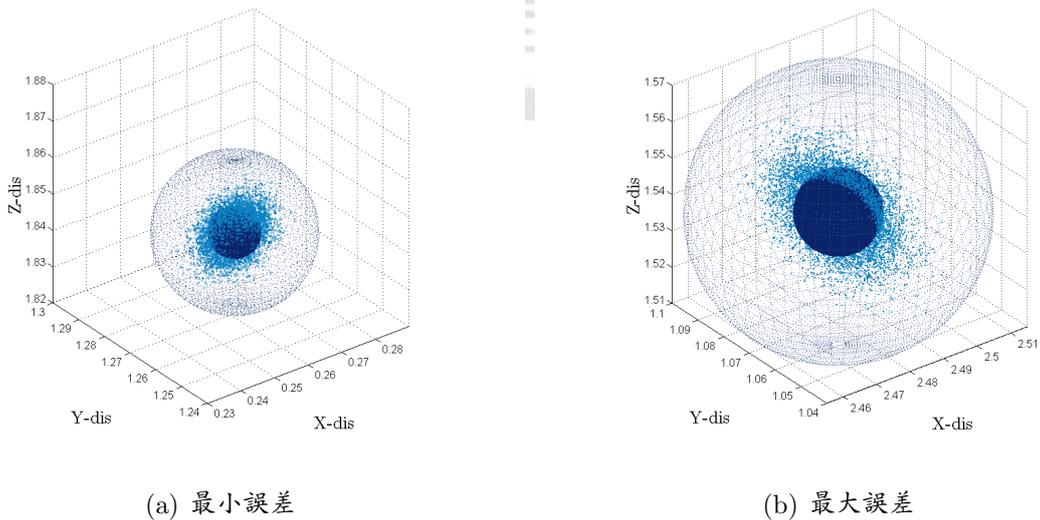


圖 5.16: S-900W最佳加工位置平均表現

## 5.2.4 無負載下之運動軌跡最佳化

當S-900W機械手臂存在長度與角度公差時，於不同加工路徑進行加工之精度皆不相同，於是本節欲經由加工路徑的選擇來改善加工精度，詳細內容與步驟已於4.4節當中介紹，最佳化數學模型與目標函數之最差表現及平均表現分別為(4.13)、(4.16a)與(4.16b)式，精度改善之最佳化流程如圖4.5，本節忽略機械手臂自身質量做運算，並假設路徑函數形式為已知條件。

在進行無負載下之運動軌跡最佳化前，需先給定已知條件：機械手臂各桿件長度 ( $L_1, L_2, L_3, d_4, d_6$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ )、總時間 ( $T_{total}$ ) 及末端位置方向向量 ( $u, v, w$ )，如表5.18所示，首先考慮在路徑上停留一個加工位置  $q = (2000, 300, 1100)$  mm，且機械手臂由  $(2000, 100, 500)$  mm 啓動，假設此路徑在  $y$ - $z$  平面上移動，且路徑函數形式假設為三次曲線  $z = c_1y^3 + c_2y^2 + c_3y + c_4$ 。

表 5.18: SCARA 機械手臂已知參數表

$L_1$	270 mm	$\Delta L$	$\pm 1$ mm
$L_2$	1050 mm	$\Delta\theta$	$\pm 0.5^\circ$
$L_3$	200 mm	$T_{total}$	2 s
$d_4$	1250 mm	$u$	(0, 0, 1)
$d_6$	255 mm	$v$	(0, -1, 0)
$N$	10000	$w$	(1, 0, 0)

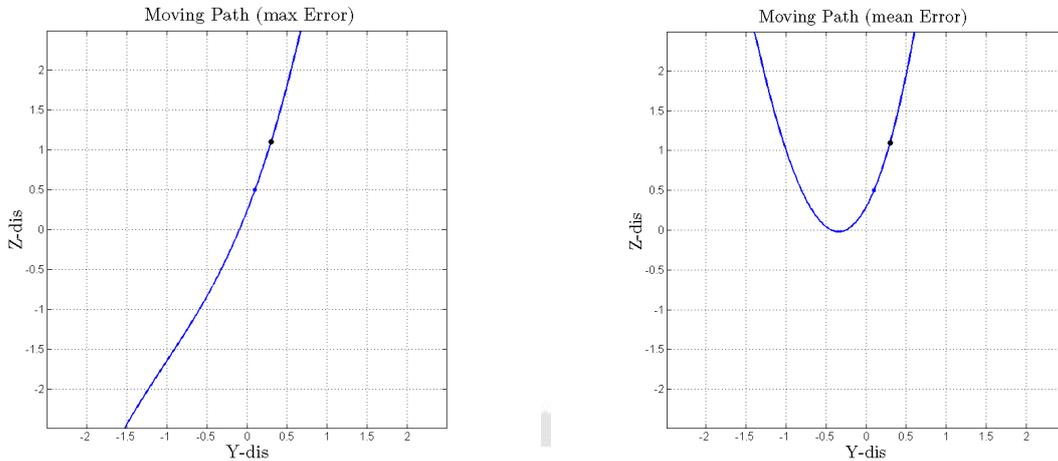
最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可得到最佳加工路徑參數使得加工位置之誤差達到最小，平均表現與最差表現之結果如表5.19，圖5.17分別為  $y$ - $z$  平面上之運動軌跡最差表現與平均表現，

表 5.19: S-900W 無負載單點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$
最差表現	[ 0.3246 ; 1.0028 ; 2.5614 ; 0.2328 ]	25.8893 mm
平均表現	[ 0.2604 ; 2.8115 ; 1.8359 ; 0.2890 ]	8.05045 mm

平均表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之平均誤差可達到最小；最差

表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之誤差可達到最小，並且可確保所有同一公差範圍下的S-900W機械手臂之誤差皆在此最小誤差範圍內，比較兩種誤差表現可明顯的看出，不同的誤差表現所得到的加工路徑差異極大。



(a) 最差表現

(b) 平均表現

圖 5.17: S-900W 無負載單點加工最佳運動軌跡

其次考慮在路徑上停留兩個加工位置： $q_1 = (2000, 300, 1100)$  mm與 $q_2 = (2000, 500, 1300)$  mm，機械手臂由 $(2000, 100, 500)$  mm啟動，在多目標最佳化當中將兩個加工位置的重要性視為相同，權重皆設為0.5，經過多目標最佳化計算可得到平均表現與最差表現之結果如表5.20，各加工點的最小誤差也同時在表中一一列出，圖5.18分別為兩個加工點在x-y平面上的運動軌跡最差表現與平均表現，比較圖5.17與圖5.18可發現加工路徑會隨著加工點的增加而改變。

表 5.20: S-900W 無負載多點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$	$q_1$ 最小誤差	$q_2$ 最小誤差
最差表現	[ -0.0024 ; -5.0002 ; 5.0006 ; 0.0500 ]	26.32251 mm	25.8893 mm	26.7557 mm
平均表現	[ -3.5021 ; -1.8465 ; 4.1935 ; 0.1026 ]	8.13544 mm	8.0504 mm	8.2204 mm

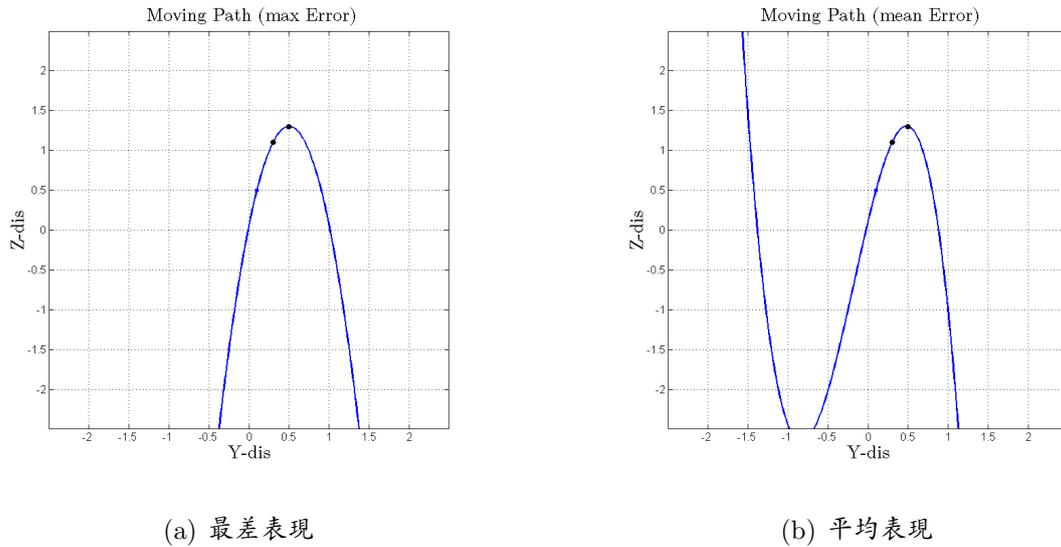


圖 5.18: S-900W無負載多點加工最佳運動軌跡

爲了解最佳運動軌跡的結果是否有達到改善精度的效果，以下比較了理想路徑與最佳路徑之誤差：

表 5.21: S-900W無負載下理想與最佳路徑之比較

	理想路徑 最差表現	最佳路徑 最差表現	理想路徑 平均表現	最佳路徑 平均表現
$c_1$	0	-0.0024	0	-3.5021
$c_2$	-5	-5.0002	-5	-1.8465
$c_3$	5	5.0006	5	4.1935
$c_4$	0.05	0.0500	0.05	0.1026
$q_1$ 最小誤差(mm)	26.0167	25.8893	8.0506	8.0504
$q_2$ 最小誤差(mm)	26.8294	26.7557	8.2205	8.2204
最小誤差(mm)	26.4230	26.3225	8.1356	8.1354

在已知加工位置 $q_1 = (2000, 300, 1100)$ 與 $q_2 = (2000, 500, 1300)$ 以及啓動點(2000,100,500)的狀況下，經由excel多項式趨勢線可擬和出理想加工路徑爲 $z = -5y^2 + 5y - 0.05$ ，再將此路徑參數加入公差並計算加工誤差，表5.21中顯示，由本文提出的研究方法求出的最佳路徑之加工誤差，無論是最差表現或平均表現皆比理想路徑之加工誤差小，確實有達到經由路徑參數的選擇來改善加工位置誤差的效果。

### 5.2.5 有負載下之運動軌跡最佳化

承接前一小節，當S-900W機械手臂載重時，經由前述之最佳化數學模型進行加工路徑之最佳化，本節將機械手臂自身質量加入考量，並將其造成之動態誤差加入數學模型當中進行計算，S-900W機械手臂之動態誤差計算詳見附錄B。本問題已知條件如下：機械手臂各桿件長度 ( $L_1, L_2, L_3, d_4, d_6$ )、各桿件截面半徑 ( $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ )、材料密度 ( $\rho$ )、總時間 ( $T_{total}$ )、時間步長 ( $dt$ )、長度與角度公差 ( $\Delta L, \Delta\theta$ )、隨機公差個數 ( $N$ )、末端位置方向向量 ( $u, v, w$ ) 及負重質量 ( $m$ )，如表5.22所示，在此先考慮在路徑上停留一個加工位置  $q = (240, 140, -100)$  mm，而路徑函數形式假設為三次曲線  $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ 。

表 5.22: SCARA機械手臂已知參數表

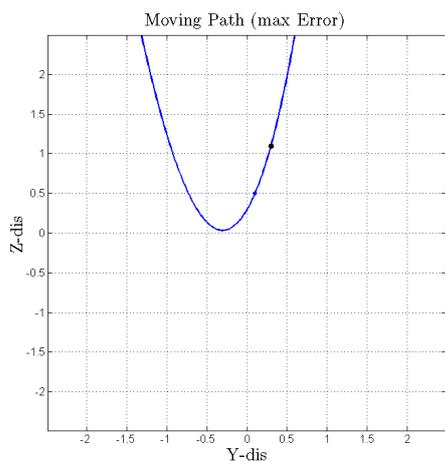
$L_1$	270 mm	$R_1$	390 mm	$\Delta L$	$\pm 1$ mm	$u$	(0, 0, 1)
$L_2$	1050 mm	$R_2$	140 mm	$\Delta\theta$	$\pm 0.5^\circ$	$v$	(0, -1, 0)
$L_3$	200 mm	$R_3$	100 mm	$\rho$	7860 kg/m <sup>3</sup>	$w$	(1, 0, 0)
$d_4$	1250 mm	$R_4$	115 mm	$T_{total}$	2 s	$m$	20 kg
$d_6$	255 mm	$R_5$	115 mm	$N$	10000		

最佳化問題使用MATLAB之fmincon最佳化演算法進行求解，給定起始值與上述已知條件後，可得到最佳加工路徑參數使得加工位置之誤差達到最小，平均表現與最差表現之結果如表5.23，圖5.18分別為y-z平面上之運動軌跡最差表現與平均表現，

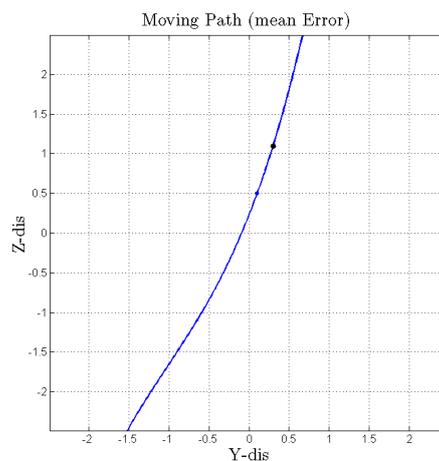
表 5.23: S-900W有負載下運動軌跡最佳化結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$
最差表現	[ 0.3259 ; 3.0139 ; 1.7484 ; 0.2957 ]	25.8859 mm
平均表現	[ 0.3242 ; 1.0023 ; 2.5611 ; 0.2326 ]	8.0505 mm

平均表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之平均誤差可達到最小；最差表現的代表意義為，依照此路徑進行加工，在加工位置處之誤差可達到最小，並且可確保所有同一公差範圍下的S-900W機械手臂之誤差皆在此最小誤差範圍內，比較兩種誤差表現可明顯的看出，不同的誤差表現所得到的加工路徑差異極大。



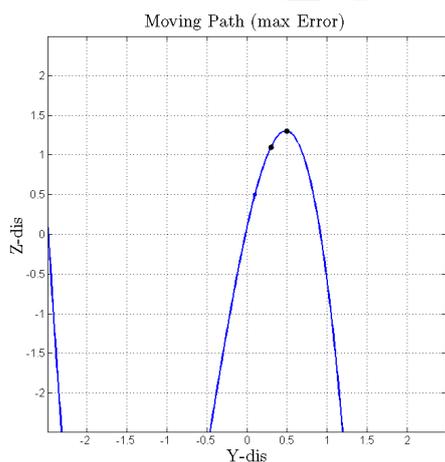
(a) 最差表現



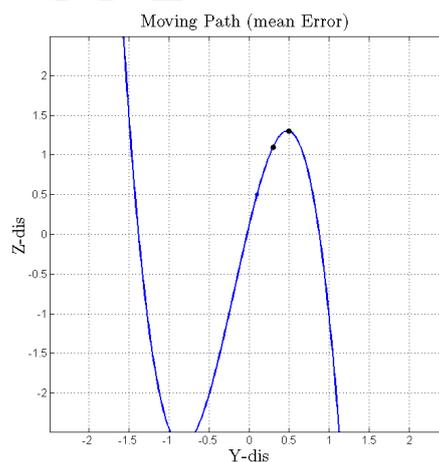
(b) 平均表現

圖 5.19: S-900W有負載單點加工最佳運動軌跡

其次考慮在路徑上停留兩個加工位置： $q_1 = (2000, 300, 1100)$  mm與 $q_2 = (2000, 500, 1300)$  mm，機械手臂由 $(2000, 100, 500)$  mm啟動，在多目標最佳化當中將兩個加工位置的重要性視為相同，權重皆設為0.5，經過多目標最佳化計算可得到平均表現與最差表現之結果如表5.24，各加工點的最小誤差也同時在表中一一列出，圖5.20分別為兩個加工點在x-y平面上的運動軌跡最差表現與平均表現，比較圖5.19與圖5.20可發現加工路徑會隨著加工點的增加而改變。



(a) 最差表現



(b) 平均表現

圖 5.20: S-900W有負載多點加工最佳運動軌跡

表 5.24: S-900W有負載多點加工最佳運動軌跡結果

	最佳加工路徑參數 $c^*$	最小誤差 $E^*$	$q_1$ 最小誤差	$q_2$ 最小誤差
最差表現	[ -2.0151 ; -3.1887 ; 4.5375 ; 0.0803 ]	26.3191 mm	25.8859 mm	26.7523 mm
平均表現	[ -3.4935 ; -1.8518 ; 4.1937 ; 0.1027 ]	8.1355 mm	8.0505 mm	8.2205 mm

爲了解最佳運動軌跡的結果是否有達到改善精度的效果，以下比較了理想路徑與最佳路徑之誤差：

表 5.25: S-900W有負載下理想與最佳路徑之比較

	理想路徑 最差表現	最佳路徑 最差表現	理想路徑 平均表現	最佳路徑 平均表現
$c_1$	0	-2.0151	0	-3.4935
$c_2$	-5	-3.1887	-5	-1.8518
$c_3$	5	4.5375	5	4.1937
$c_4$	0.05	0.0803	0.05	0.1027
$q_1$ 最小誤差(mm)	26.0142	25.8859	8.0506	8.0505
$q_2$ 最小誤差(mm)	26.8265	26.7523	8.2206	8.2205
最小誤差(mm)	26.4204	26.3191	8.1356	8.1355

在已知加工位置 $q_1 = (2000, 300, 1100)$ 與 $q_2 = (2000, 500, 1300)$ 以及啓動點(2000,100,500)的狀況下，經由excel多項式趨勢線可擬和出理想加工路徑爲 $z = -5y^2 + 5y - 0.05$ ，再將此路徑參數加入公差並計算加工誤差，表5.25中顯示，由本文提出的研究方法求出的最佳路徑之加工誤差，無論是最差表現或平均表現皆比理想路徑之加工誤差小，確實有達到經由路徑參數的選擇來改善加工位置誤差的效果。

### 5.3 結果討論

本文使用了水平式四軸機械手臂 (SCARA) 與垂直式六軸機械手臂 (S-900W) 進行範例演練，當機械手臂存在長度與角度公差下，經由本文的研究方法，的確能夠在不提升成本的狀況下改善機械手臂加工誤差，以下將做幾種結果比較：

- 單點加工與路徑加工之誤差比較

表5.26與5.27分別列出SCARA與S-900W於無負載下與有負載下之單點加工與路徑加工之最小誤差比較，

表 5.26: SCARA有無負載下之誤差比較

	最小誤差			
	無負載		有負載	
	單點加工	路徑加工	單點加工	路徑加工
最差表現	2.24994 mm	2.68113 mm	2.25059 mm	4.07653 mm
平均表現	0.73721 mm	1.02077 mm	0.73722 mm	1.02120 mm

表 5.27: S-900W有無負載下之誤差比較

	最小誤差			
	無負載		有負載	
	單點加工	路徑加工	單點加工	路徑加工
最差表現	22.41545 mm	25.88932 mm	23.07276 mm	26.01424 mm
平均表現	6.028198 mm	8.05045 mm	6.02355 mm	8.05061 mm

經由比較後可以發現，SCARA與S-900W無論是在無負重或是有負重的狀況下，單點加工之最小誤差結果在兩種表現下都比路徑加工之最小誤差好，其原因可能是在搜尋加工路徑的過程中，路徑上的加工位置與理想加工位置即存在誤差，導致誤差累積使得結果比單點加工差。

- 無負重與有負重之誤差比較

同樣經由表5.27可比較無負重與有負重之最小誤差，由兩個表中的數值可以發現，有無

負重下之最小誤差並沒有一定的關係存在，因動態誤差有可能導致加工位置偏離理想加工位置，也可能與尺寸公差、剛性誤差的效果互相抵消，反而找到更好的加工位置或加工路徑。

● SCARA與S-900W之誤差比較

由於有無負重並不影響其最小誤差結果，在此僅將SCARA與S-900W無負重下之最小誤差拿來比較，如表5.28所示，

表 5.28: SCARA與S-900W於無負重下之誤差比較

	最小誤差			
	SCARA		S-900W	
	單點加工	路徑加工	單點加工	路徑加工
最差表現	2.24994 mm	2.68113 mm	22.41545 mm	25.88932 mm
平均表現	0.73721 mm	1.02077 mm	6.028198 mm	8.05045 mm

由上表可看出，當兩種機械手臂給定的長度與角度公差為相同數值的狀況下，簡單的水平式四軸機械手臂SCARA的誤差比垂直式六軸機械手臂S-900W的誤差小了相當多，由結構來看，SCARA只有三個角度變化且桿件數較少，而S-900W有六個角度變化且桿件數較多，因角度變化與桿件數的不同，導致長度與角度公差的數目也不相同，由以上資訊我們可以歸納出，長度與角度公差確實是使得加工誤差變大的重要因素，且角度變化與桿件數越多，加工誤差則會越大。

## 第六章 研究貢獻與未來方向

本研究針對機械手臂存在尺寸公差與剛性誤差時，探討在不增加成本的狀況下改善加工精度的方法，機械手臂的加工方式分別以單點加工與路徑加工進行探討，兩種加工方式又分別探討無負重與有負重的狀況，在有負重的情況下考量本身質量與重物，並加上動態誤差，探討其對精度之影響。

### 6.1 研究貢獻

本論文的研究貢獻主要可分為下列幾點：

- **考量不確定因素**

本論文將尺寸公差、關節剛性造成之誤差同時加入影響加工精度之不確定因素。

- **考量動態誤差**

在考量機械手臂自身質量與負重下，機械手臂各桿件與負重之重量會對各關節產生應力及應變，而在運動狀態下，切線與法線方向之作用力亦會對關節產生應力及應變，而上述之應變便會造成誤差量的產生，在此本文將此誤差稱為「動態誤差」，許多文獻並未將其列入考量，但動態誤差亦為影響加工精度的因素之一，本文將其列入考量。

- **提出新的策略以尋找加工誤差最小的加工位置與路徑**

本文提出新的策略流程，當機械手臂進行單點加工與路徑加工時，經由新的策略便能夠在不增加成本下尋找出加工誤差最小的加工位置，進而改善加工精度，同時將負重與機械手臂自身質量列入考量進行計算。

- **將新策略應用於兩款三維機械手臂進行探討**

本論文探討一簡單的水平式四軸機械手臂與較複雜的垂直式六軸機械手臂，經過此新策略的搜尋，確實能找到誤差大幅改善後的加工位置。

- **新策略的未來發展性**

當建構了龐大的機械手臂資料庫後，此系統化的決策過程可幫助使用者選購符合金額上限與精度要求之機械手臂，並且同時可得到誤差最小之加工或運作方式。

## 6.2 未來研究方向

本論文利用最佳化方法求解加工誤差最小之加工位置與路徑，但其中還有一些不足的地方，以下提供幾點作為未來研究之方向：

- **多關節剛性及公差的探討**

本論文結合尺寸公差、關節剛性誤差與動態誤差為影響加工精度之不確定因素，但僅將尺寸公差與關節剛性誤差假設為長度與角度的公差，沒有針對內部詳細探討，未來可嘗試依照這個方向進行深入的探討。

- **最佳路徑的搜尋**

本論文在探討加工位置誤差最小的最佳路徑時，假設已知加工路徑的函數形式，但路徑函數的形式也可能影響到加工誤差，未來可探討路徑為未知的狀況下，進行最小加工誤差的最佳路徑搜尋。

- **系統化決策過程的建構**

在研究貢獻中提到，有了本論文的新策略為基礎，可建構一系統化的決策過程，其中包含各種機械手臂的尺寸、順逆向運動學、價格等等，當使用者需購入機械手臂時，只需提供「金額上限」與「精度要求」，便能經由此系統化的決策過程得到符合要求之機械手臂，以及誤差最小之加工或運作方式。

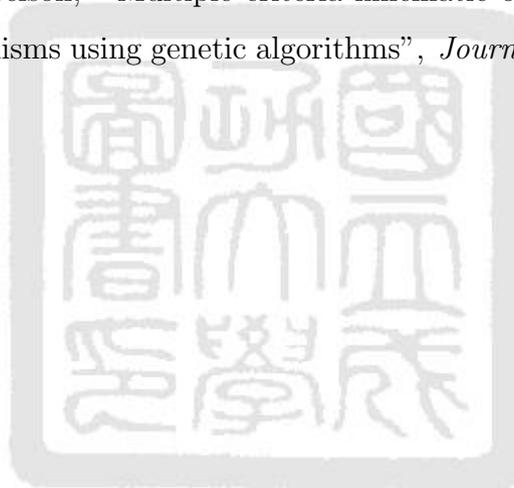
- **考量公差成本最佳設計**

在前一項當中描述了系統化決策過程的建構，當使用者需購入機械手臂時，只需提供「金額上限」與「精度要求」，便能經由此系統化的決策過程得到符合要求之機械手臂，以及誤差最小之加工或運作方式，而如何從符合要求的機械手臂當中去選擇才最符合成本的考量也是能夠進行探討的部分，未來可以最佳化結合公差與成本，提供使用者各級公差之所費成本，以利使用者做選擇機械手臂的依據。

## 參 考 文 獻

- [1] 丁純乾與陳俊皓，「工業用機械手臂設計與專利分析」，智慧機器人技術專輯，317輯，2009。
- [2] M. S. Alshamasin, F. Ionescu, and R. T. Al-Kasasbeh, “Kinematic modeling and simulation of a scara”, *European Journal of Scientific Research*, 37(3), 388–405, 2009.
- [3] C. R. Carignan and D. L. Akin, “Cooperative control of two arms in the transport of an inertial load in zero gravity”, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(4), 414–419, 1988.
- [4] L. Chen and X. Tang, “Optimal motion planning of attitude control for space robot system with dual arms”, *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, 8858–8861, 2006.
- [5] C. A. Coello Coello, A. D. Christiansen, and A. H. Aguirre, “Using a new ga based multiobjective optimization technique for the design of robot arms”, *Robotica*, 16, 401–414, 1998.
- [6] H. P. Geering, L. Guzzella, S. A. R. Hepner, and C. H. Onder, “Time-optimal motions of robots in assembly tasks”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31(6), 512–518, 1986.
- [7] S. Grahn, P. Flisberg, G. Johansson, P. Lindbergand, and T. Larsson, “TCP position tolerances in joint torque minimizations”, *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2, 800–805, 1988.
- [8] G. Inceri, “Trajectory tracking for scara robots with compliant transmissions a technique to improve the positioning precision”, *Proceedings of the 12th IFToMM World Congress*, 2007.
- [9] W. Owen, E. Croft, and B. Benhabib, “Stiffness optimization for two armed robotic sculpting”, *Industrial Robot: An International Journal*, 35(1), 46–57, 2008.
- [10] RobotWorx, “Fanuc S900W RJ3 Robot”, <http://www.welding-robots.com/fanuc.php?robot=s900w>, 2012.

- [11] B. K. Rout and R. K. Mittal, “Tolerance design of manipulator parameters using design of experiment approach”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34, 445–462, 2007.
- [12] S. F. P. Saramago and V. Steffen, “Optimization of the trajectory planning of robot manipulators taking into account the dynamics of the system”, *Mechanism and Machine Theory*, 33(7), 883–894, 1998.
- [13] M. Stock and K. Miller, “Optimal kinematic design of spatial parallel manipulators application to linear delta robot”, *Journal of Mechanical Design*, 125, 292–301, 2003.
- [14] L. W. Tsai, *Robot Analysis*, Wiley-Interscience, 1999.
- [15] X. Zhang and C. A. Nelson, “Multiple criteria kinematic optimization for the design of spherical serial mechanisms using genetic algorithms”, *Journal of Mechanical Design*, 133, 011005–1–11, 2011.



## 附錄A：SCARA動態誤差計算

以下將進行SCARA機械手臂之動態誤差計算，圖A.1為SCARA機械手臂的簡易圖，首先我們將先進行各關節的應力計算：

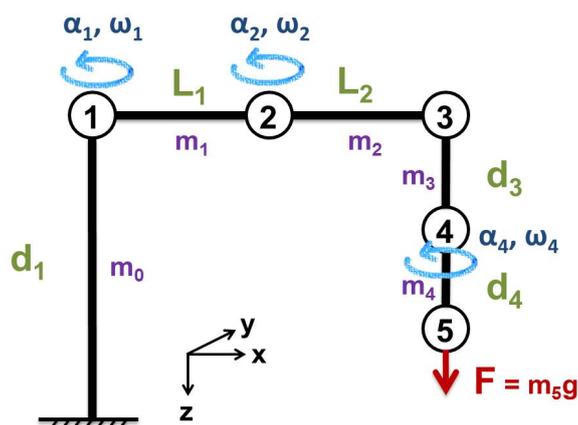


圖 A.1: SCARA機械手臂簡易圖

### ● 第一關節：

#### (a) 重力造成之應力

$$M_1 = (m_3 + m_4 + m_5)g * r_{3/1} + m_2g * r_{2m/1} + m_1g * L_1/2$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{I}$$

其中 $M_1$ 表示重力對第一關節處造成的力矩， $\sigma_1$ 表示重力對第一關節造成之應力， $r_{i/1}$ 表示第 $i$ 個關節相對第一關節的向量， $r_{im/1}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第一關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

#### (b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

在計算應力之前需要先建構關節處加速度與桿件中心的加速度，並將其轉換為切線與法線方向，

$$a_2 = a_1 + \alpha_1 \times r_{2/1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{2/1}) = (a_2)_T \hat{e}_T + (a_2)_N \hat{e}_N$$

$$a_3 = a_2 + \alpha_2 \times r_{3/2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{3/2}) = (a_3)_T \hat{e}_T + (a_3)_N \hat{e}_N$$

$$a_{2m} = a_2 + \alpha_2 \times r_{2m/2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2m/2}) = (a_{2m})_T \hat{e}_T + (a_{2m})_N \hat{e}_N$$

其中 $a_i$ 表示第 $i$ 個關節處的加速度， $a_{im}$ 第 $i$ 個桿件質心處的加速度， $\omega_i$ 與 $\alpha_i$ 分別代表第 $i$ 個桿件的角速度與角加速度，切線加速度造成之應力計算如下

$$M_{1T} = (m_3 + m_4 + m_5) * (a_3)_T * r_{3/1} + m_2 * (a_{2m})_T * r_{2m/1} + m_1 * (a_{1m})_T * r_{1m/1}$$

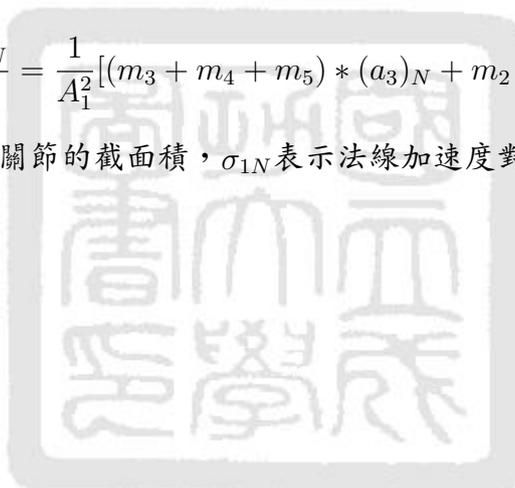
$$\sigma_{1T} = \frac{M_{1T}y}{I}$$

其中 $M_{1T}$ 表示切線加速度對第一關節處造成的力矩， $\sigma_{1T}$ 表示切線加速度對第一關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{1N} = \frac{\Sigma m * a_N}{A} = \frac{1}{A_1^2} [(m_3 + m_4 + m_5) * (a_3)_N + m_2 * (a_{2m})_N + m_1 * \omega_1^2 * r_{1m/1}]$$

其中 $A_1$ 表示第一關節的截面積， $\sigma_{1N}$ 表示法線加速度對第一關節造成之應力。



• 第二關節：

(a) 重力造成之應力

$$M_2 = (m_3 + m_4 + m_5)g * L_2 + m_2g * L_2/2$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2 y}{I}$$

其中 $M_2$ 表示重力對第二關節處造成的力矩， $\sigma_2$ 表示重力對第二關節造成之應力， $r_{i/2}$ 表示第 $i$ 個關節相對第二關節的向量， $r_{im/2}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第二關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

(b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

在計算應力之前需要先建構關節處加速度與桿件中心的加速度，並將其轉換為切線與法線方向，

$$a_3 = a_2 + \alpha_2 \times r_{3/2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{3/2}) = (a_3)_T \hat{e}_T + (a_3)_N \hat{e}_N$$

$$a_{2m} = a_2 + \alpha_2 \times r_{2m/2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2m/2}) = (a_{2m})_T \hat{e}_T + (a_{2m})_N \hat{e}_N$$

當計算第二關節處的應力時，我們將第二關節視為參考點，即 $a_2 = 0$ ，於是我們便能夠得到上述加速度新的數值，以 $a'$ 表示，

$$a'_3 = (a_3)'_T \hat{e}_T + (a_3)'_N \hat{e}_N$$

$$a'_{2m} = (a_{2m})'_T \hat{e}_T + (a_{2m})'_N \hat{e}_N$$

切線加速度造成之應力計算如下

$$M_{2T} = (m_3 + m_4 + m_5) * (a_3)'_T * L_2 + m_2 * (a_{2m})'_T * L_2/2$$

$$\sigma_{2T} = \frac{M_{2T} y}{I}$$

其中 $M_{2T}$ 表示切線加速度對第二關節造成的力矩， $\sigma_{2T}$ 表示切線加速度對第二關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{2N} = \frac{\Sigma m * a_N}{A} = \frac{1}{A_2} [(m_3 + m_4 + m_5) * (a_3)'_N + m_2 * (a_{2m})'_N]$$

其中 $A_2$ 表示第二關節的截面積， $\sigma_{2N}$ 表示法線加速度對第二關節造成之應力。

● 第三關節：

(a) 重力造成之應力

$$\sigma_3 = \frac{F}{A} = \frac{(m_3 + m_4 + m_5)g}{A_3^2}$$

其中 $\sigma_3$ 表示重力對第三關節造成之應力， $A_3$ 表示第三關節的截面積。

● 第四關節：

(a) 重力造成之應力

$$\sigma_4 = \frac{F}{A} = \frac{(m_4 + m_5)g}{A_4^2}$$

其中 $\sigma_4$ 表示重力對第四關節造成之應力， $A_4$ 表示第四關節的截面積。

(b) 扭矩造成之剪應力

在此假設重物為一半徑為 $R$ 的球狀物體，質量慣性矩計算如下

$$I_{44} = \frac{1}{2}m_4R_{j4}^2$$
$$I_{4m} = \frac{2}{5}m_5R^2$$

其中 $I_{44}$ 代表第四根桿件對第四關節的質量慣性矩， $I_{4m}$ 代表負重 $m$ 對第四關節的質量慣性矩， $R_{j4}$ 表示第四關節的截面半徑，由此質量慣性矩便能夠計算出關節扭矩以及扭矩造成之剪應力，

$$T_4 = I\alpha = (I_{44} + I_{4m})\alpha_4$$
$$\tau_4 = \frac{T_4r}{J}$$

其中 $T_4$ 表示第四關節的關節扭矩， $\tau_4$ 表示扭矩對第四關節造成之剪應力，在此 $r$ 與 $J$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

● 第五關節：

(a) 重力造成之應力

$$\sigma_5 = \frac{F}{A} = \frac{m_5g}{A_5^2}$$

其中 $\sigma_5$ 表示重力對第五關節造成之應力， $A_5$ 表示第五關節的截面積。

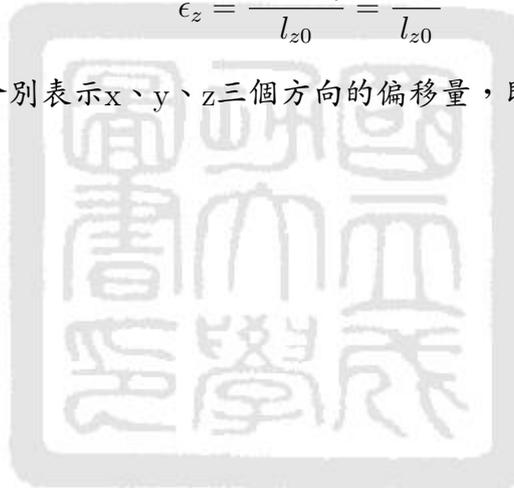
計算完各關節處的應力後，我們經由下列式子將應力轉化為應變，

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

再經由應變的公式進而求得各方向的偏移量，

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{l_x - l_{x0}}{l_{x0}} = \frac{\Delta l_x}{l_{x0}} \\ \epsilon_y &= \frac{l_y - l_{y0}}{l_{y0}} = \frac{\Delta l_y}{l_{y0}} \\ \epsilon_z &= \frac{l_z - l_{z0}}{l_{z0}} = \frac{\Delta l_z}{l_{z0}}\end{aligned}$$

其中 $\Delta l_x$ 、 $\Delta l_y$ 、 $\Delta l_z$ 分別表示x、y、z三個方向的偏移量，即本文定義的動態誤差。



## 附錄B：S-900W動態誤差計算

以下將進行S-900W機械手臂之動態誤差計算，圖B.1為S-900W機械手臂的簡易圖，首先我們將先進行各關節的應力計算：

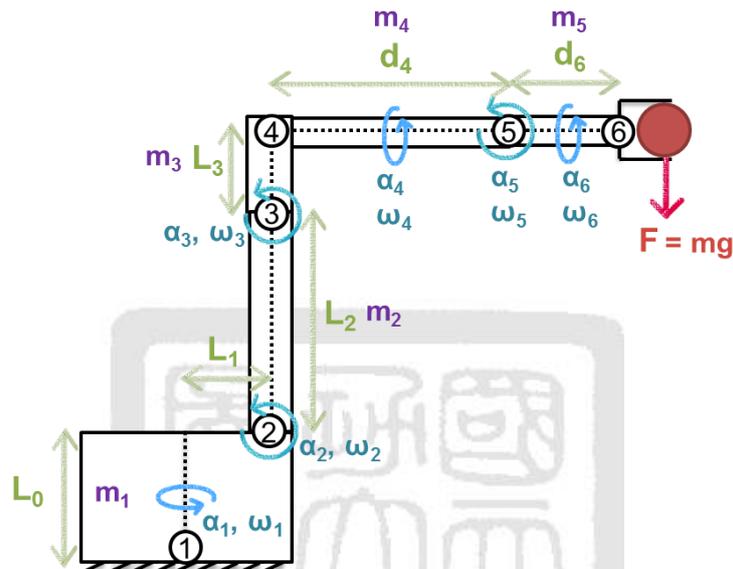


圖 B.1: S-900W機械手臂簡易圖

### ● 第一關節：

#### (a) 重力造成之應力

$$M_1 = r_{6/1} \times mg + r_{5m/1} \times m_5g + r_{4m/1} \times m_4g + r_{3m/1} \times m_3g + r_{2m/1} \times m_2g$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 y}{I}$$

其中 $M_1$ 表示重力對第一關節處造成的力矩， $\sigma_1$ 表示重力對第一關節造成之應力， $r_{i/1}$ 表示第 $i$ 個關節相對第一關節的向量， $r_{im/1}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第一關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

#### (b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

在計算應力之前需要先建構關節處加速度與桿件中心的加速度，並將其轉換為切

線與法線方向，

$$a_2 = a_1 + \alpha_1 \times r_{2/1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{2/1}) = (a_2)_T \hat{e}_T + (a_2)_N \hat{e}_N$$

$$a_3 = a_2 + \alpha_2 \times r_{3/2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{3/2})$$

$$a_4 = a_3 + \alpha_3 \times r_{4/3} + \omega_3 \times (\omega_3 \times r_{4/3})$$

$$a_5 = a_4 + \alpha_4 \times r_{5/4} + \omega_4 \times (\omega_4 \times r_{5/4})$$

$$a_6 = a_5 + \alpha_5 \times r_{6/5} + \omega_5 \times (\omega_5 \times r_{6/5})$$

$$a_{1m} = a_1 + \alpha_1 \times r_{1m/1} + \omega_1 \times (\omega_1 \times r_{1m/1})$$

$$a_{2m} = a_2 + \alpha_2 \times r_{2m/2} + \omega_2 \times (\omega_2 \times r_{2m/2})$$

$$a_{3m} = a_3 + \alpha_3 \times r_{3m/3} + \omega_3 \times (\omega_3 \times r_{3m/3})$$

$$a_{4m} = a_4 + \alpha_4 \times r_{4m/4} + \omega_4 \times (\omega_4 \times r_{4m/4})$$

$$a_{5m} = a_5 + \alpha_5 \times r_{5m/5} + \omega_5 \times (\omega_5 \times r_{5m/5})$$

其中  $a_i$  表示第  $i$  個關節處的加速度， $a_{im}$  第  $i$  個桿件質心處的加速度， $\omega_i$  與  $\alpha_i$  分別代表第  $i$  個桿件的角速度與角加速度，切線加速度造成之應力計算如下

$$\begin{aligned} M_{1T} &= r_{6/1} \times m(a_6)_T + r_{5m/1} \times m_5(a_{5m})_T + r_{4m/1} \times m_4(a_{4m})_T + r_{3m/1} \times m_3(a_{3m})_T \\ &\quad + r_{2m/1} \times m_2(a_{2m})_T \\ \sigma_{1T} &= \frac{M_{1Ty}}{I} \end{aligned}$$

其中  $M_{1T}$  表示切線加速度對第一關節處造成的力矩， $\sigma_{1T}$  表示切線加速度對第一關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{1N} = \frac{1}{A_1} [m_1(a_{1m})_N + m_2(a_{2m})_N + m_3(a_{3m})_N + m_4(a_{4m})_N + m_5(a_{5m})_N + m(a_6)_N]$$

其中  $A_1$  表示第一關節的截面積， $\sigma_{1N}$  表示法線加速度對第一關節造成之應力。

(d) 扭矩造成之剪應力

在此假設重物為一半徑為R的球狀物體，質量慣性矩計算如下

$$\begin{aligned}I_{11} &= \frac{1}{2}m_1R_{j1}^2 \\I_{12} &= \frac{1}{4}\rho\pi R_{j2}^2L_2\left(R_{j2}^2 + \frac{R_{j2}^2}{\cos^2\theta_2}\right) + \frac{1}{3}\rho\pi R_{j2}^2L_2^3\cos^2\theta_2\tan^2\theta_2 + m_2L_1^2 \\I_{13} &= \frac{1}{4}\rho\pi R_{j3}^2L_3\left(R_{j3}^2 + \frac{R_{j3}^2}{\cos^2\theta_{23}}\right) + \frac{1}{3}\rho\pi R_{j3}^2L_3^3\cos^2\theta_{23}\tan^2\theta_{23} + m_3(L_1 + L_2\sin\theta_2)^2 \\I_{14} &= \frac{1}{4}\rho\pi R_{j4}^2d_4\left(R_{j4}^2 + \frac{R_{j4}^2}{\cos^2(90 - \theta_{23})}\right) + \frac{1}{3}\rho\pi R_{j4}^2d_4^3\cos^2(90 - \theta_{23})\tan^2(90 - \theta_{23}) \\&\quad + m_4(L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_{23})^2 \\I_{15} &= \frac{1}{4}\rho\pi R_{j5}^2d_6\left(R_{j5}^2 + \frac{R_{j5}^2}{\cos^2(90 - \theta_{235})}\right) + \frac{1}{3}\rho\pi R_{j5}^2d_6^3\cos^2(90 - \theta_{235})\tan^2(90 - \theta_{235}) \\&\quad + m_5(L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_{23} + d_4\cos\theta_{23})^2 \\I_{1m} &= \frac{2}{5}mR^2 + m(L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin\theta_{23} + d_4\cos\theta_{23} + d_6\cos\theta_{235} + R)^2\end{aligned}$$

其中 $I_{1i}$ 代表第*i*根桿件對第一關節的質量慣性矩， $I_{1m}$ 代表負重*m*對第一關節的質量慣性矩， $R_{ji}$ 表示第*i*關節的截面半徑，由此質量慣性矩便能夠計算出關節扭矩以及扭矩造成之剪應力，

$$\begin{aligned}T_1 &= I\alpha = (I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} + I_{1m})\alpha_1 \\ \tau_1 &= \frac{T_1 r}{J}\end{aligned}$$

其中 $T_1$ 表示第一關節的關節扭矩， $\tau_1$ 表示扭矩對第一關節造成之剪應力，在此 $r$ 與 $J$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

• 第二關節：

(a) 重力造成之應力

$$M_2 = r_{6/2} \times mg + r_{5m/2} \times m_5g + r_{4m/2} \times m_4g + r_{3m/2} \times m_3g + r_{2m/2} \times m_2g$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2 y}{I}$$

其中 $M_2$ 表示重力對第二關節處造成的力矩， $\sigma_2$ 表示重力對第二關節造成之應力， $r_{i/2}$ 表示第 $i$ 個關節相對第二關節的向量， $r_{im/2}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第二關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

(b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

當計算第二關節處的應力時，我們將第二關節視為參考點，即 $a_2 = 0$ ，於是我們便能夠得到加速度新的數值，以 $a'$ 表示，

$$a'_3 = (a_3)'_T \hat{e}_T + (a_3)'_N \hat{e}_N$$

$$a'_4 = \dots$$

$$\dots$$

$$a'_{5m} = (a_{5m})'_T \hat{e}_T + (a_{5m})'_N \hat{e}_N$$

切線加速度造成之應力計算如下

$$M_{2T} = r_{6/2} \times m(a_6)'_T + r_{5m/2} \times m_5(a_{5m})'_T + r_{4m/2} \times m_4(a_{4m})'_T + r_{3m/2} \times m_3(a_{3m})'_T$$

$$+ r_{2m/2} \times m_2(a_{2m})'_T$$

$$\sigma_{2T} = \frac{M_{2T} y}{I}$$

其中 $M_{2T}$ 表示切線加速度對第二關節造成的力矩， $\sigma_{2T}$ 表示切線加速度對第二關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{2N} = \frac{1}{A_2} [m_2 * (a_{2m})'_N + m_3 * (a_{3m})'_N + m_4 * (a_{4m})'_N + m_5 * (a_{5m})'_N + m * (a_6)'_N]$$

其中 $A_2$ 表示第二關節的截面積， $\sigma_{2N}$ 表示法線加速度對第二關節造成之應力。

• 第三關節：

(a) 重力造成之應力

$$M_3 = r_{6/3} \times mg + r_{5m/3} \times m_5g + r_{4m/3} \times m_4g + r_{3m/3} \times m_3g$$

$$\sigma_3 = \frac{M_3 y}{I}$$

其中 $M_3$ 表示重力對第三關節處造成的力矩， $\sigma_3$ 表示重力對第三關節造成之應力， $r_{i/3}$ 表示第 $i$ 個關節相對第三關節的向量， $r_{im/3}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第三關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

(b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

當計算第三關節處的應力時，我們將第三關節視為參考點，即 $a_3 = 0$ ，於是我們便能夠得到加速度新的數值，以 $a''$ 表示，

$$a_4'' = (a_4)''_T \hat{e}_T + (a_4)''_N \hat{e}_N$$

$$a_5'' = \dots$$

$$\dots$$

$$a_{5m}'' = (a_{5m})''_T \hat{e}_T + (a_{5m})''_N \hat{e}_N$$

切線加速度造成之應力計算如下

$$M_{3T} = r_{6/3} \times m(a_6)''_T + r_{5m/3} \times m_5(a_{5m})''_T + r_{4m/3} \times m_4(a_{4m})''_T + r_{3m/3} \times m_3(a_{3m})''_T$$

$$\sigma_{3T} = \frac{M_{3T} y}{I}$$

其中 $M_{3T}$ 表示切線加速度對第三關節造成的力矩， $\sigma_{3T}$ 表示切線加速度對第三關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{3N} = \frac{1}{A_3} [m_3 * (a_{3m})''_N + m_4 * (a_{4m})''_N + m_5 * (a_{5m})''_N + m * (a_6)''_N]$$

其中 $A_3$ 表示第三關節的截面積， $\sigma_{3N}$ 表示法線加速度對第三關節造成之應力。

• 第四關節：

(a) 重力造成之應力

$$M_4 = r_{6/4} \times mg + r_{5m/4} \times m_5g + r_{4m/4} \times m_4g$$

$$\sigma_4 = \frac{M_4 y}{I}$$

其中 $M_4$ 表示重力對第四關節處造成的力矩， $\sigma_4$ 表示重力對第四關節造成之應力， $r_{i/4}$ 表示第 $i$ 個關節相對第四關節的向量， $r_{im/4}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第四關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

(b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

當計算第四關節處的應力時，我們將第四關節視為參考點，即 $a_4 = 0$ ，於是我們便能夠得到加速度新的數值，以 $a'''$ 表示，

$$a_5''' = (a_5)'''_T \hat{e}_T + (a_5)'''_N \hat{e}_N$$

$$a_6''' = \dots$$

$$\dots$$

$$a_{5m}''' = (a_{5m})'''_T \hat{e}_T + (a_{5m})'''_N \hat{e}_N$$

切線加速度造成之應力計算如下

$$M_{4T} = r_{6/4} \times m(a_6)'''_T + r_{5m/4} \times m_5(a_{5m})'''_T + r_{4m/4} \times m_4(a_{4m})'''_T$$

$$\sigma_{4T} = \frac{M_{4T} y}{I}$$

其中 $M_{4T}$ 表示切線加速度對第四關節造成的力矩， $\sigma_{4T}$ 表示切線加速度對第四關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{4N} = \frac{1}{A_4} [m_4 * (a_{4m})'''_N + m_5 * (a_{5m})'''_N + m * (a_6)'''_N]$$

其中 $A_4$ 表示第四關節的截面積， $\sigma_{4N}$ 表示法線加速度對第四關節造成之應力。

(d) 扭矩造成之剪應力

$$I_{44} = \frac{1}{2}m_4R_{j4}^2$$

$$I_{45} = \frac{1}{4}\rho\pi R_{j5}^2d_6 \left( R_{j5}^2 + \frac{R_{j5}^2}{\cos^2\theta_5} \right) + \frac{1}{3}\rho\pi R_{j5}^2d_6^3 \cos^2\theta_5 \tan^2\theta_5$$

$$I_{4m} = \frac{2}{5}mR^2 + m(d_6 \sin\theta_5 + R)^2$$

其中 $I_{4i}$ 代表第 $i$ 根桿件對第四關節的質量慣性矩， $I_{4m}$ 代表負重 $m$ 對第四關節的質量慣性矩， $R_{ji}$ 表示第 $i$ 關節的截面半徑，由此質量慣性矩便能夠計算出關節扭矩以及扭矩造成之剪應力，

$$T = I\alpha = (I_{44} + I_{45} + I_{4m})\alpha_4$$

$$\tau_4 = \frac{T_4 r}{J}$$

其中 $T_4$ 表示第四關節的關節扭矩， $\tau_4$ 表示扭矩對第四關節造成之剪應力，在此 $r$ 與 $J$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

● 第五關節：

(a) 重力造成之應力

$$M_5 = r_{6/5} \times mg + r_{5m/5} \times m_5g$$

$$\sigma_5 = \frac{M_5 y}{I}$$

其中 $M_5$ 表示重力對第五關節處造成的力矩， $\sigma_5$ 表示重力對第五關節造成之應力， $r_{i/5}$ 表示第 $i$ 個關節相對第五關節的向量， $r_{im/5}$ 表示第 $i$ 個桿件質心相對第五關節的向量，在此 $y$ 與 $I$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

(b) 切線加速度( $a_T$ )造成之應力

當計算第五關節處的應力時，我們將第五關節視為參考點，即 $a_5 = 0$ ，於是我們便能夠得到加速度新的數值，以 $a''''$ 表示，

$$a_6'''' = (a_6)''''_T \hat{e}_T + (a_6)''''_N \hat{e}_N$$

$$a_{1m}'''' = \dots$$

...

$$a_{5m}'''' = (a_{5m})''''_T \hat{e}_T + (a_{5m})''''_N \hat{e}_N$$

切線加速度造成之應力計算如下

$$M_{5T} = r_{6/5} \times m(a_6)''''_T + r_{5m/5} \times m_5(a_{5m})''''_T$$

$$\sigma_{5T} = \frac{M_{5T} y}{I}$$

其中 $M_{5T}$ 表示切線加速度對第五關節造成的力矩， $\sigma_{5T}$ 表示切線加速度對第五關節造成之應力。

(c) 法線加速度( $a_N$ )造成之應力

$$\sigma_{5N} = \frac{1}{A_5} [m_5 * (a_{5m})''''_N + m * (a_6)''''_N]$$

其中 $A_5$ 表示第五關節的截面積， $\sigma_{5N}$ 表示法線加速度對第五關節造成之應力。

(d) 扭矩造成之剪應力

$$I_{55} = \frac{1}{4}\rho\pi R_{j5}^2 d_6 \left( R_{j5}^2 + \frac{R_{j5}^2}{\cos^2 \theta_5} \right) + \frac{1}{3}\rho\pi R_{j5}^2 d_6^3 \cos^2 \theta_5 \tan^2 \theta_5$$
$$I_{5m} = \frac{2}{5}mR^2 + m(d_6 \sin \theta_5 + R)^2$$

其中 $I_{5i}$ 代表第 $i$ 根桿件對第五關節的質量慣性矩， $I_{5m}$ 代表負重 $m$ 對第五關節的質量慣性矩， $R_{ji}$ 表示第 $i$ 關節的截面半徑，由此質量慣性矩便能夠計算出關節扭矩以及扭矩造成之剪應力，

$$T_5 = I\alpha = (I_{55} + I_{5m})\alpha_6$$

$$\tau_5 = \frac{T_5 r}{J}$$

其中 $T_5$ 表示第五關節的關節扭矩， $\tau_5$ 表示扭矩對第五關節造成之剪應力，在此 $r$ 與 $J$ 的計算方式會依照關節形狀的不同而有所不同。

● 第六關節：

(a) 重力造成之應力

$$\sigma_6 = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A_6}$$

其中 $\sigma_6$ 表示重力對第六關節造成之應力， $A_6$ 表示第六關節的截面積。

計算完各關節處的應力後，我們經由下列式子將應力轉化為應變，

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}$$

再經由應變的公式進而求得各方向的偏移量，

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{l_x - l_{x0}}{l_{x0}} = \frac{\Delta l_x}{l_{x0}} \\ \epsilon_y &= \frac{l_y - l_{y0}}{l_{y0}} = \frac{\Delta l_y}{l_{y0}} \\ \epsilon_z &= \frac{l_z - l_{z0}}{l_{z0}} = \frac{\Delta l_z}{l_{z0}}\end{aligned}$$

其中 $\Delta l_x$ 、 $\Delta l_y$ 、 $\Delta l_z$ 分別表示x、y、z三個方向的偏移量，即本文定義的動態誤差。

